

Wahlaufgaben

Aufgabe 2023 B/2b:

5 P

Aus einem Kegel wird eine regelmäßige fünfseitige Pyramide herausgearbeitet (siehe Abbildung). Die Eckpunkte der Grundfläche der fünfseitigen Pyramide liegen auf der Kreislinie der Grundfläche des Kegels.

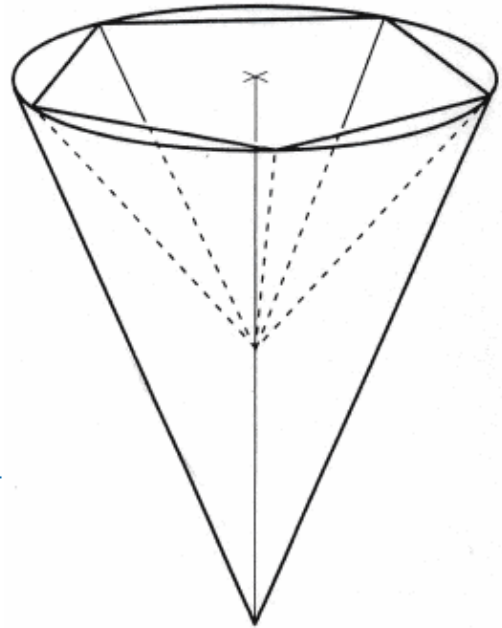
Es gilt:

$$a = 8,6 \text{ cm} \quad (\text{Grundkante der Pyramide})$$

$$h_k = 15,2 \text{ cm} \quad (\text{Körperhöhe des Kegels})$$

$$h_p = 7,6 \text{ cm} \quad (\text{Körperhöhe der Pyramide})$$

Um wie viele cm^2 unterscheiden sich die Inhalte der Mantelflächen des Kegels und der Pyramide?



Strategie 2023 B/2b:

Gegeben:

Kegel

Regelmäßige fünfseitige Pyramide

$$a = 8,6 \text{ cm}$$

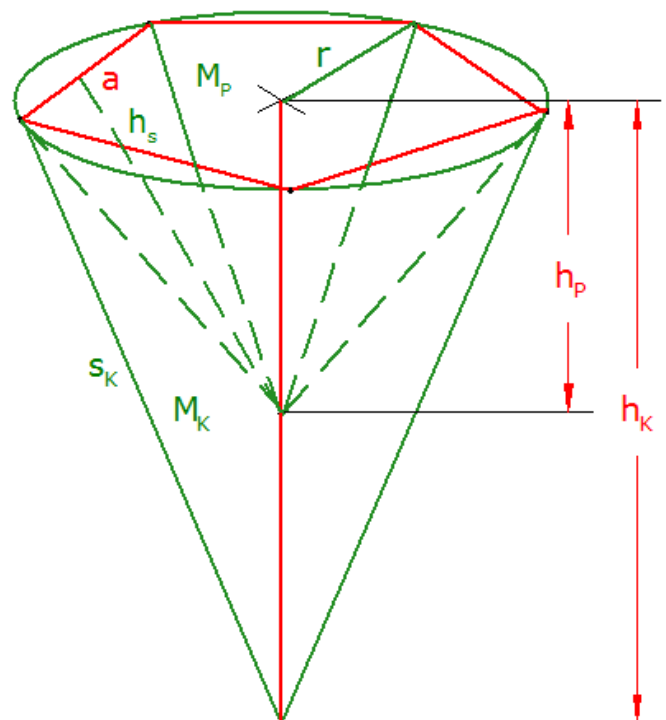
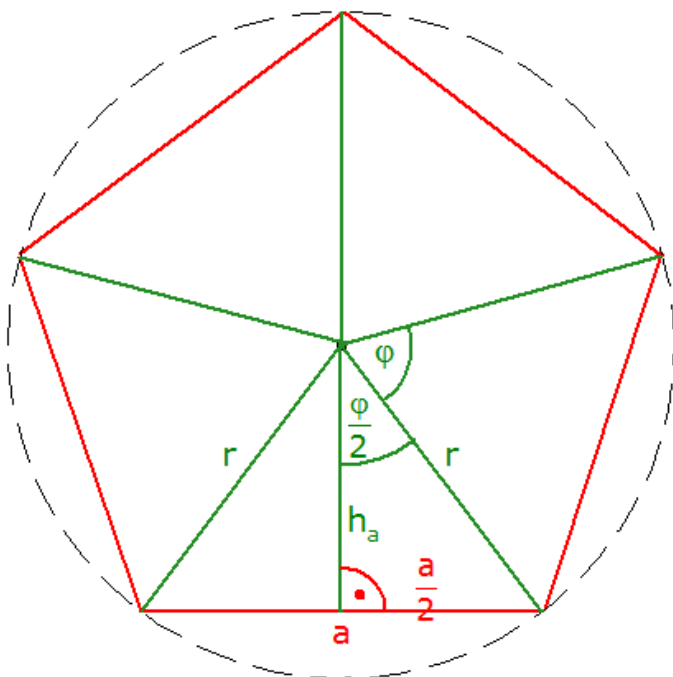
$$h_k = 15,2 \text{ cm}$$

$$h_p = 7,6 \text{ cm}$$

Gesucht:

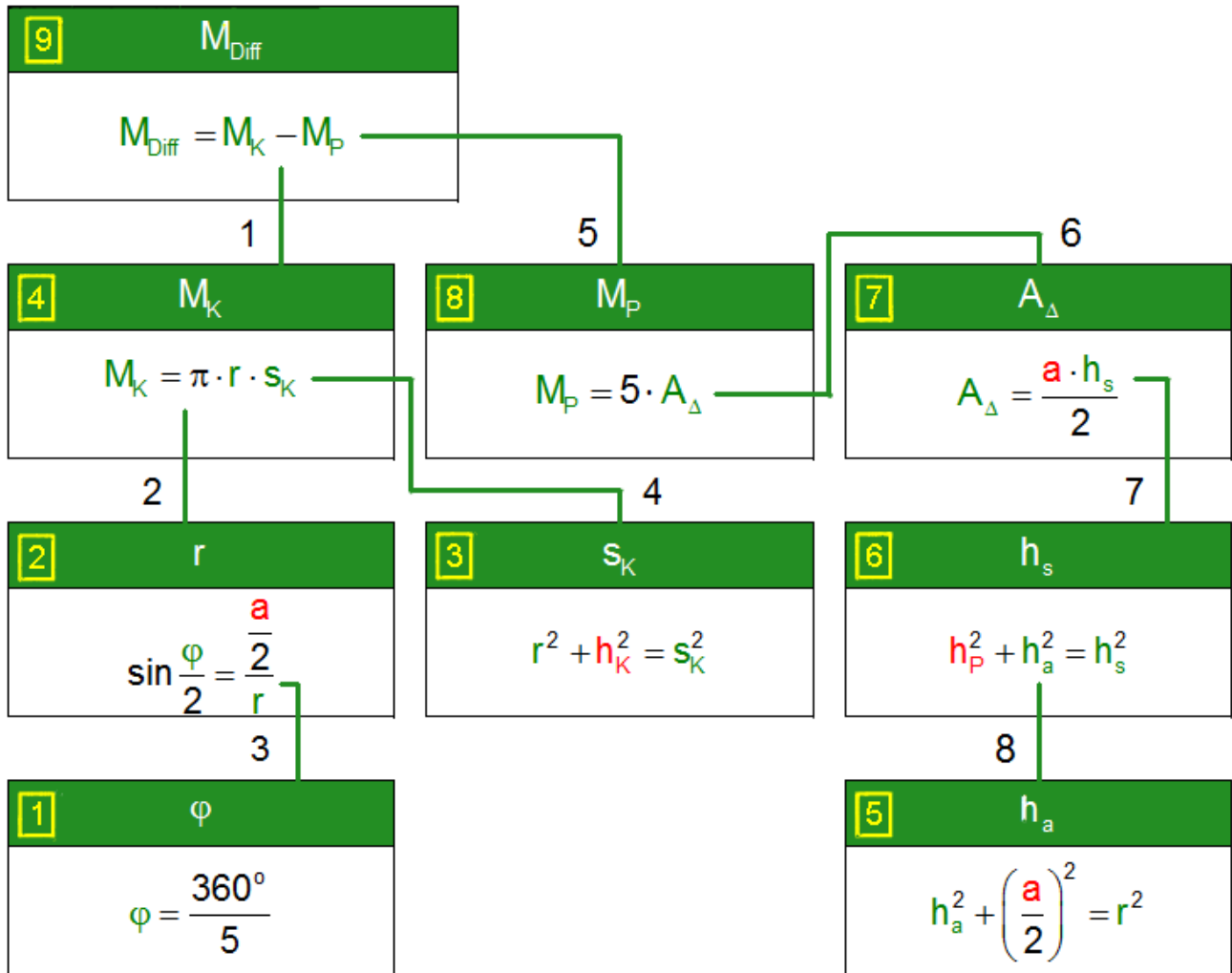
M_{Diff}

Skizze:



Strategie 2023 B/2b:

Struktogramm:

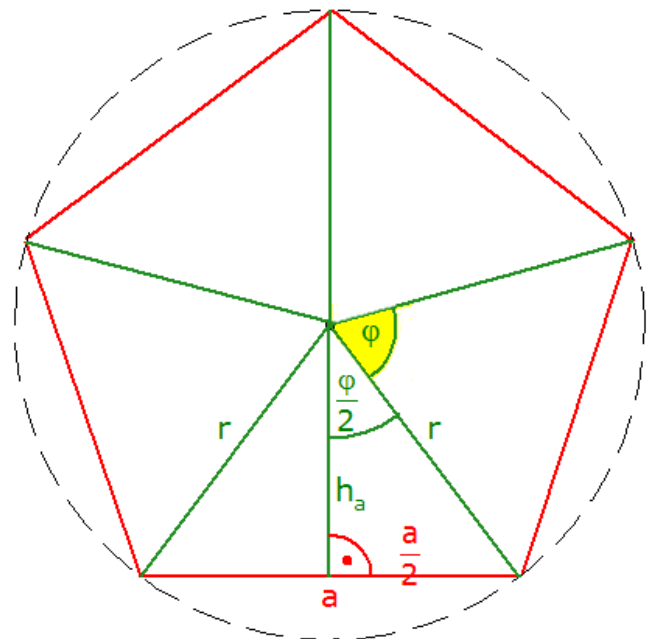


Lösung 2023 B/2b:

1. Berechnung des Winkels φ :

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\varphi = 72^\circ$$



Lösung 2023 B/2b:

2. Berechnung des Umkreisradius r :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{r}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

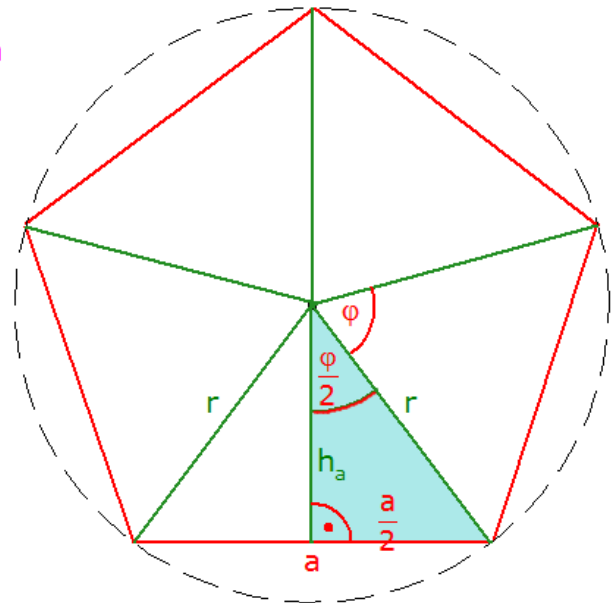
$$\sin \frac{72^\circ}{2} = \frac{8,6}{r}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{4,3}{r}$$

$$0,5878 = \frac{4,3}{r} \quad | \cdot r$$

$$r \cdot 0,5878 = 4,3 \quad | : 0,5878$$

$$\underline{r = 7,32 \text{ cm}}$$



3. Berechnung der Kegelseitenkante s_K :

$$r^2 + h_k^2 = s_K^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$7,32^2 + 15,2^2 = s_K^2$$

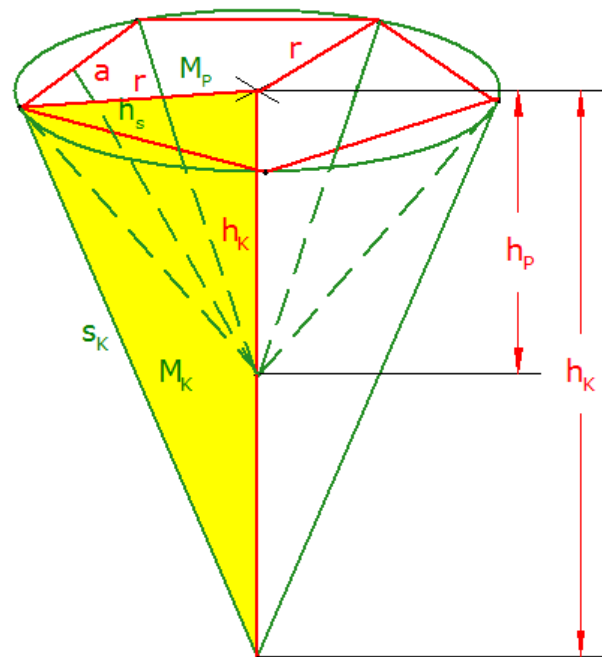
$$53,58 + 231,04 = s_K^2$$

$$284,62 = s_K^2$$

Seiten tauschen

$$s_K^2 = 284,62 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\underline{s_K = 16,87 \text{ cm}}$$



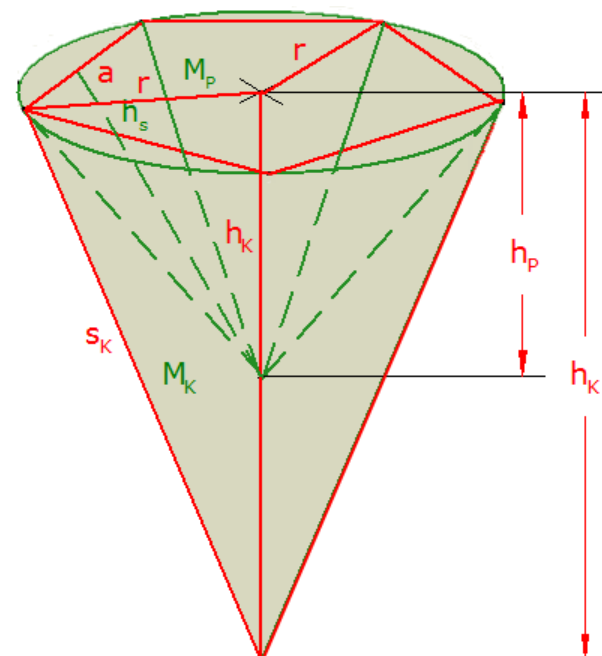
4. Berechnung des Kegelmantels M_K :

$$M_K = \pi \cdot r \cdot s_K$$

Formel Kegelmantel

$$M_K = \pi \cdot 7,32 \cdot 16,87$$

$$\underline{M_K = 387,95 \text{ cm}^2}$$



Lösung 2023 B/2b:

5. Berechnung der Dreieckshöhe h_a :

$$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

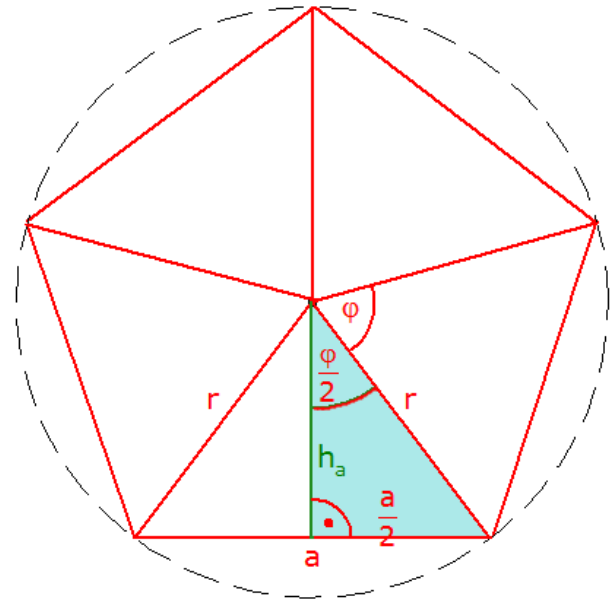
$$h_a^2 + \left(\frac{8,6}{2}\right)^2 = 7,32^2$$

$$h_a^2 + 4,3^2 = 7,32^2$$

$$h_a^2 + 18,49 = 53,58 \quad | - 18,49$$

$$h_a^2 = 35,09 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\underline{h_a = 5,92 \text{ cm}}$$



6. Berechnung der Seitenhöhe h_s :

$$h_s^2 = h_p^2 + h_a^2$$

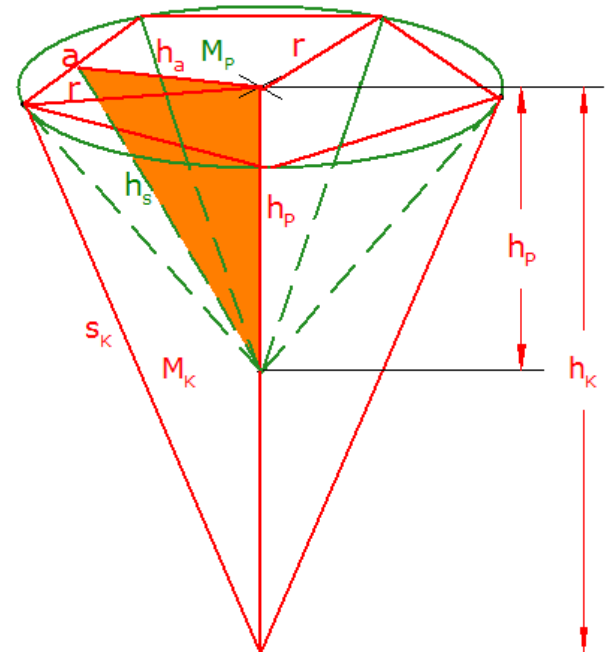
Pythagoras im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck

$$h_s^2 = 7,6^2 + 5,92^2$$

$$h_s^2 = 57,76 + 35,05$$

$$h_s^2 = 92,81 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\underline{h_s = 9,63 \text{ cm}}$$



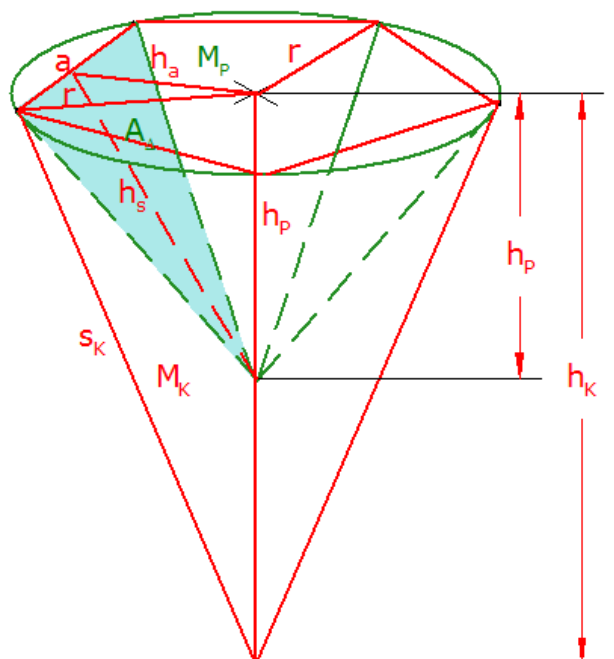
7. Berechnung der Dreiecksfläche A_Δ :

$$A_\Delta = \frac{a \cdot h_s}{2}$$

Formel Dreiecksfläche

$$A_\Delta = \frac{8,6 \cdot 9,63}{2}$$

$$\underline{A_\Delta = 41,49 \text{ cm}^2}$$



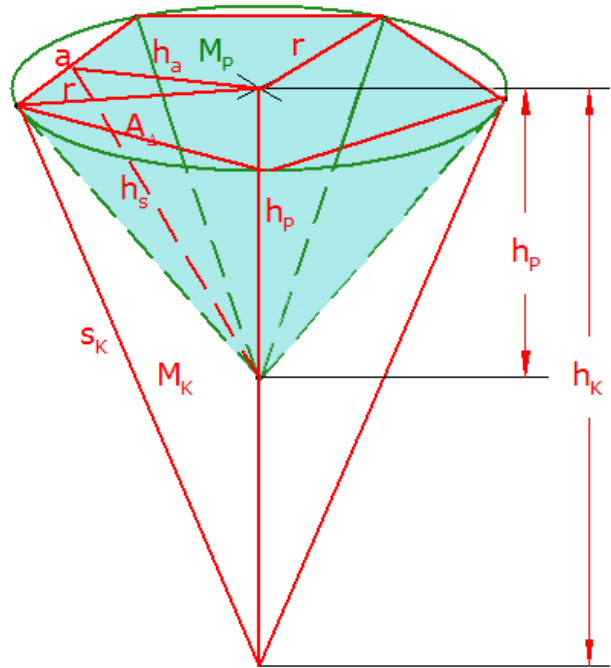
Lösung 2023 B/2b:

8. Berechnung des Pyramidenmantels M_p :

$$M_p = 5 \cdot A_{\Delta}$$

$$M_p = 5 \cdot 41,49$$

$$\underline{\underline{M_p = 207,45 \text{ cm}^2}}$$



9. Berechnung der Manteldifferenz von Kegel und Pyramide:

$$\text{Diff} = M_k - M_p$$

$$\text{Diff} = 387,95 - 207,45$$

$$\underline{\underline{\text{Diff} = 180,5 \text{ cm}^2}}$$