Wahlaufgaben

Aufgabe 2017 W2b:

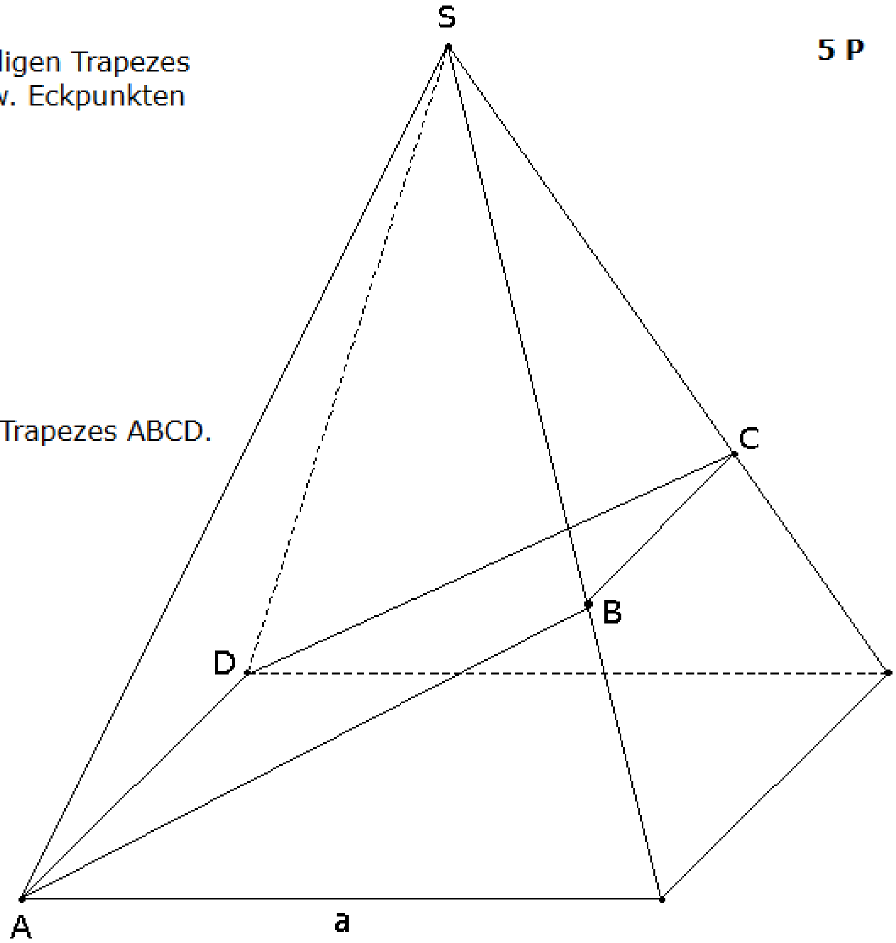
5 P

Die Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes ABCD liegen auf den Kanten bzw. Eckpunkten einer quadratischen Pyramide.

Es gilt:

$$O_{Pyr} = 357\,cm^2$$
$$a = 10,0\,cm$$
$$\overline{AB} = \overline{BS}$$

Berechnen Sie den Umfang des Trapezes ABCD.



Strategie 2017 W2b:

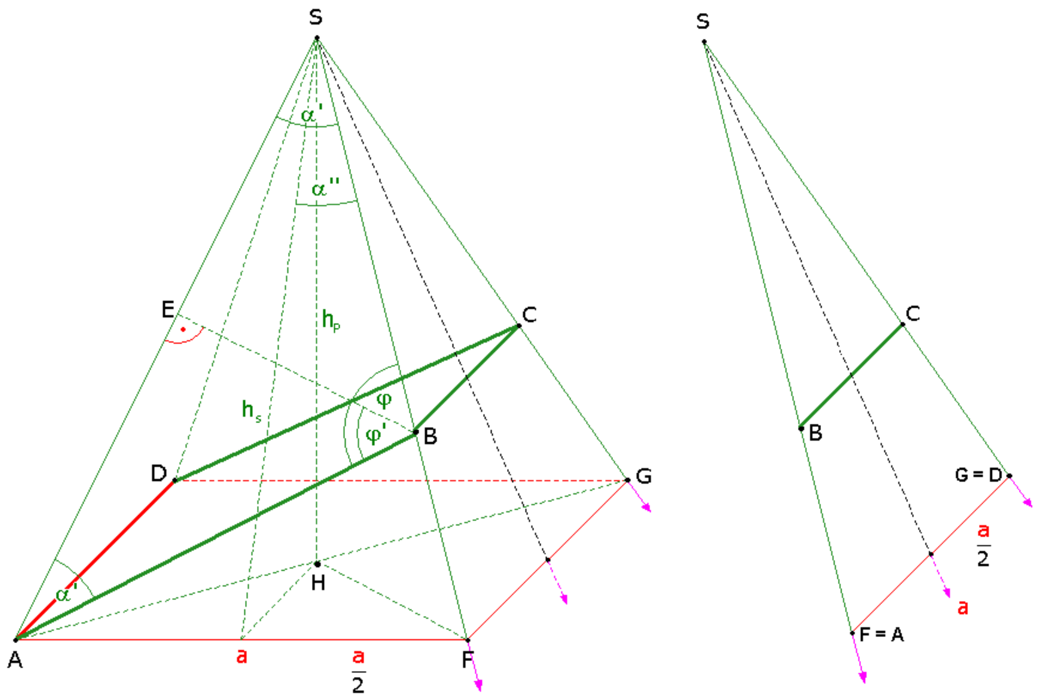
<u>Gegeben:</u>

$$O_{Pyr} = 357\,cm^2$$
$$a = 10,0\,cm$$
$$\overline{AB} = \overline{BS}$$

<u>Gesucht:</u>

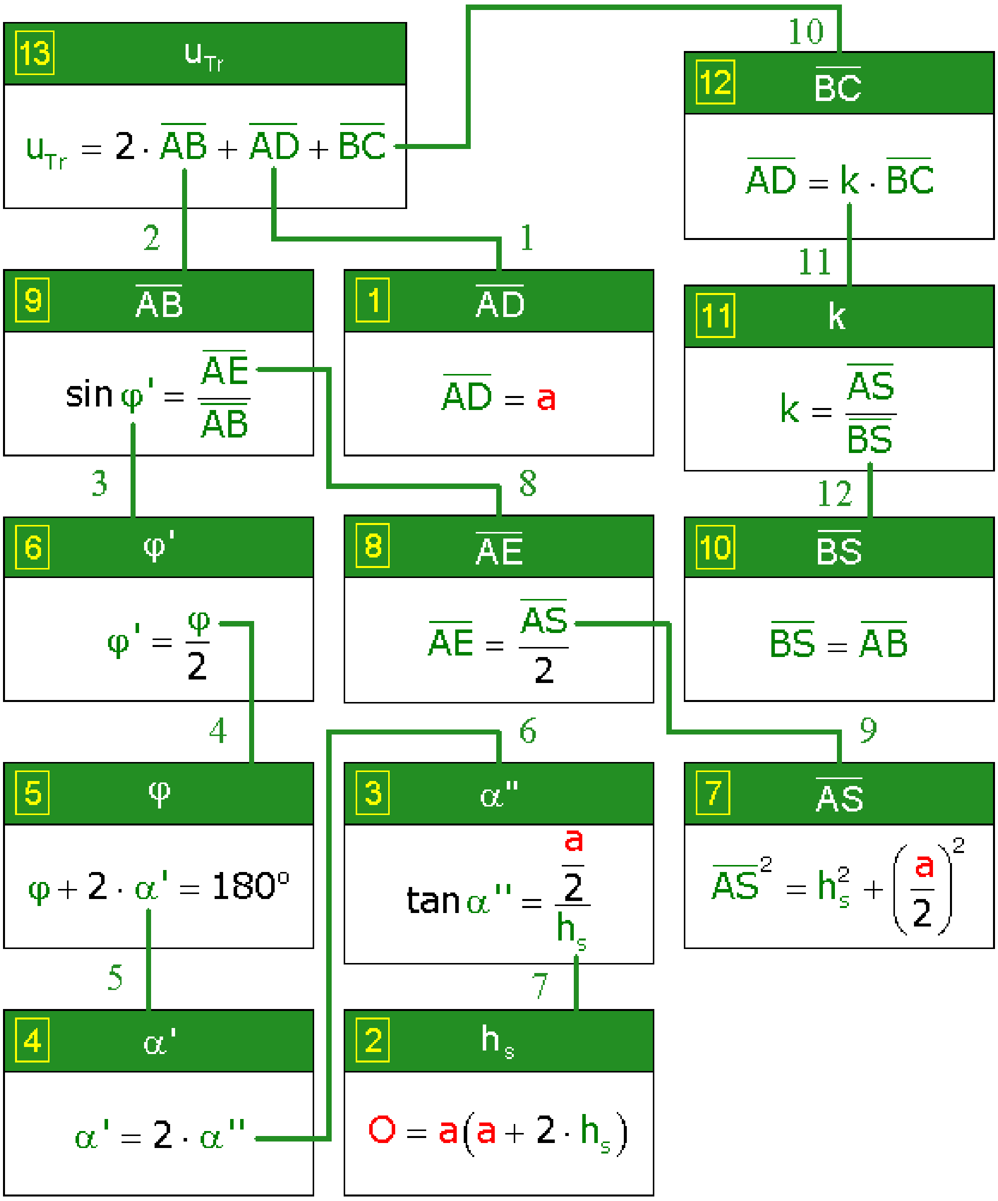
u_{Tr}

<u>Skizze:</u>

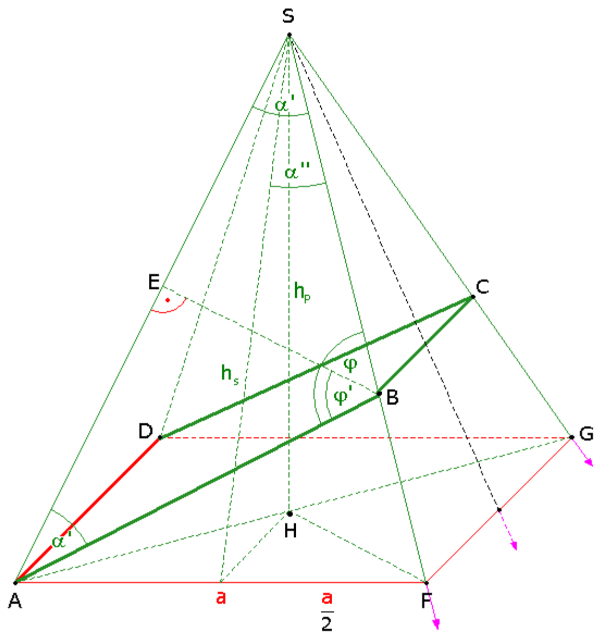


Strategie 2017 W2b:

Struktogramm:



Lösung 2017 W2b:



1. Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

$\overline{AD} = a$

$\underline{\overline{AD} = 10\,\text{cm}}$

Lösung 2017 W2b:

2. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s:

$O_{Pyr} = a(a + 2 \cdot h_s)$ Oberflächenformel quadratische Pyramide

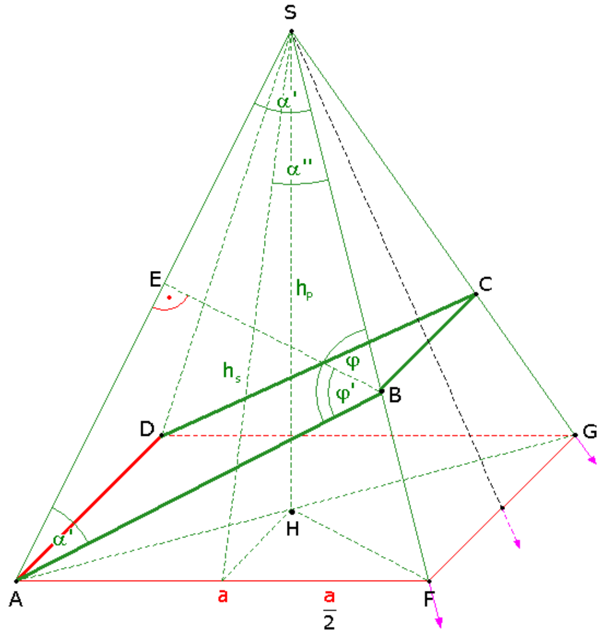
$357 = 10(10 + 2 \cdot h_s)$ Klammer ausmultiplizieren

$357 = 100 + 20 \cdot h_s$ Seiten tauschen

$100 + 20 \cdot h_s = 357 \quad | -100$

$20 \cdot h_s = 257 \quad | :20$

$\underline{h_s = 12,85\,\text{cm}}$



3. Berechnung des Winkels α'':

$$\tan\alpha'' = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{a}{2}}{h_s}$$

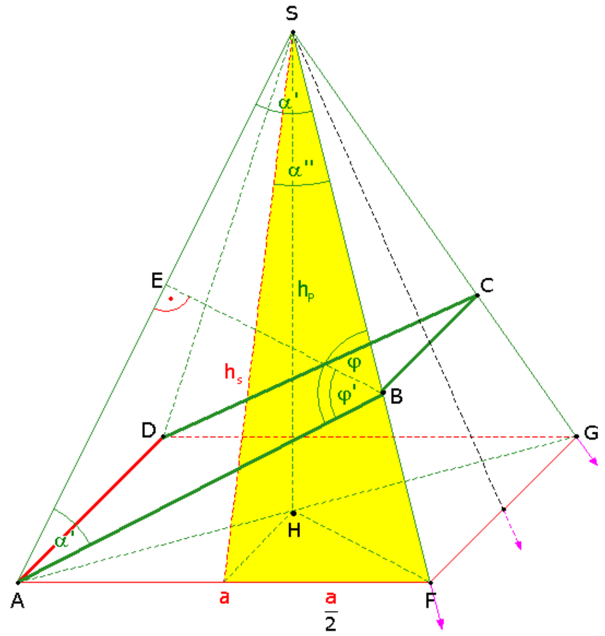
Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\tan\alpha'' = \frac{\frac{10}{2}}{12,85}$$

$$\tan\alpha'' = \frac{5}{12,85}$$

$$\tan\alpha'' = 0,3891$$

$$\underline{\alpha'' = 21,3^\circ}$$

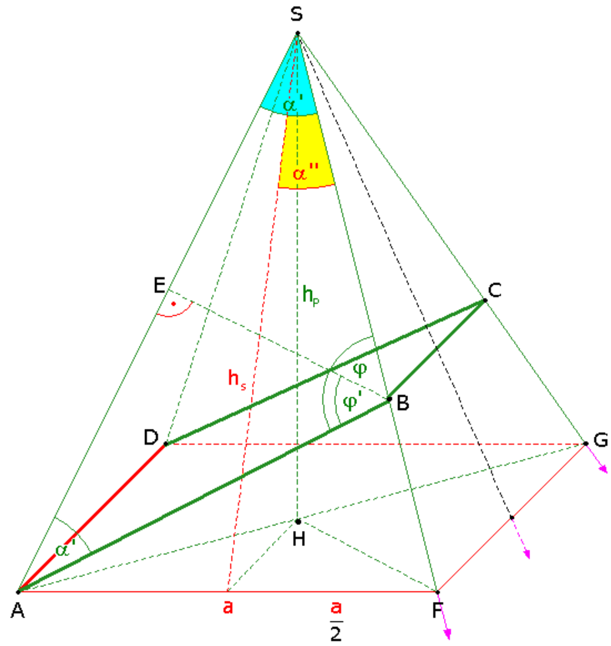


4. Berechnung des Winkels α':

$\alpha' = 2 \cdot \alpha''$ Dreieck AFS ist gleichschenklig

$\alpha' = 2 \cdot 21,3^\circ$

$\underline{\alpha' = 42,5^\circ}$



Lösung 2017 W2b:

5. Berechnung des Winkels φ:

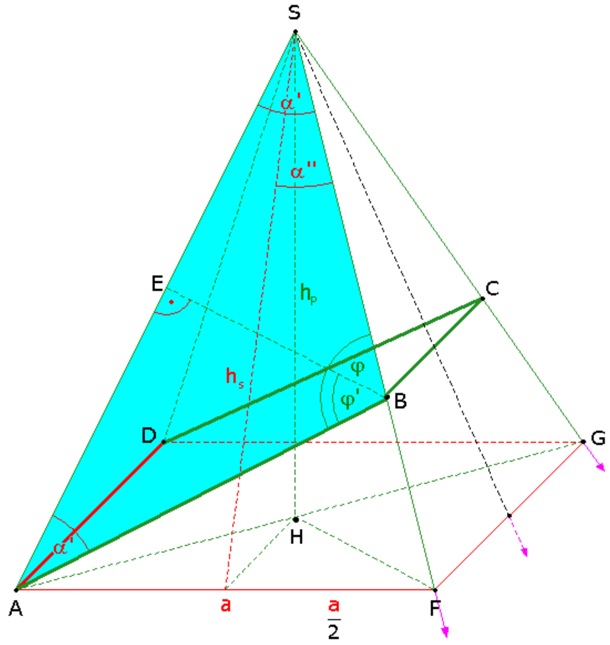
$$\varphi + 2 \cdot \alpha' = 180^\circ$$

Winkelsumme im gleichschenkligen hellblauen Dreieck ABS

$$\varphi + 2 \cdot 42{,}5^\circ = 180^\circ$$

$$\varphi + 85^\circ = 180^\circ \quad \left| -85^\circ \right.$$

$$\underline{\varphi = 95^\circ}$$



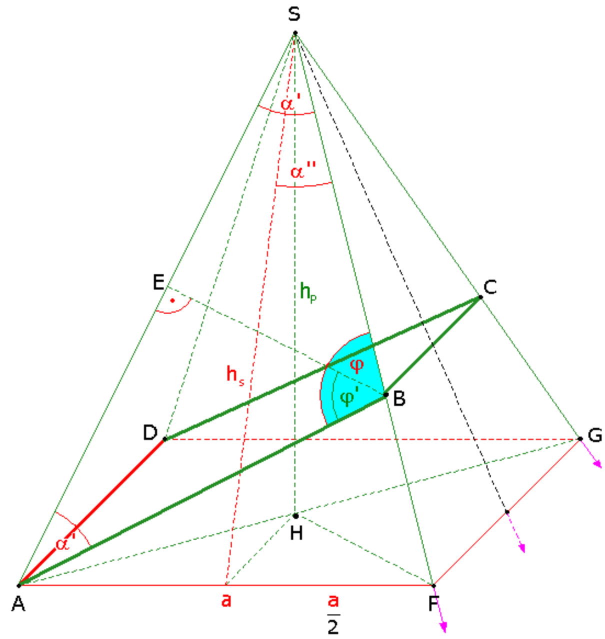
6. Berechnung des Winkels φ':

$$\varphi' = \frac{\varphi}{2}$$

Dreieck ABS ist gleichschenklig

$$\varphi' = \frac{95^\circ}{2}$$

$$\underline{\varphi' = 47{,}5^\circ}$$



7. Berechnung der Pyramiden-Seitenkante $\overline{AS}$:

$$\overline{AS}^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen hellgrünen Dreieck

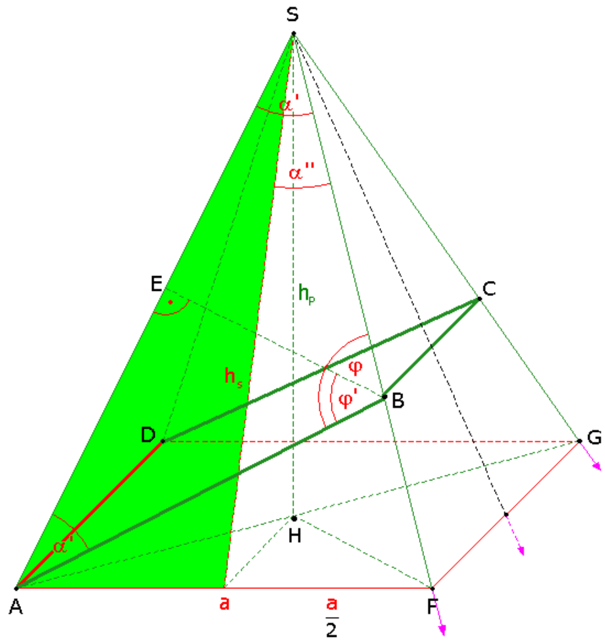
$$\overline{AS}^2 = 12{,}85^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$\overline{AS}^2 = 12{,}85^2 + 5^2$$

$$\overline{AS}^2 = 165{,}1225 + 25$$

$$\overline{AS}^2 = 190{,}1225 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$\underline{\overline{AS} = 13{,}79\,\text{cm}}$$



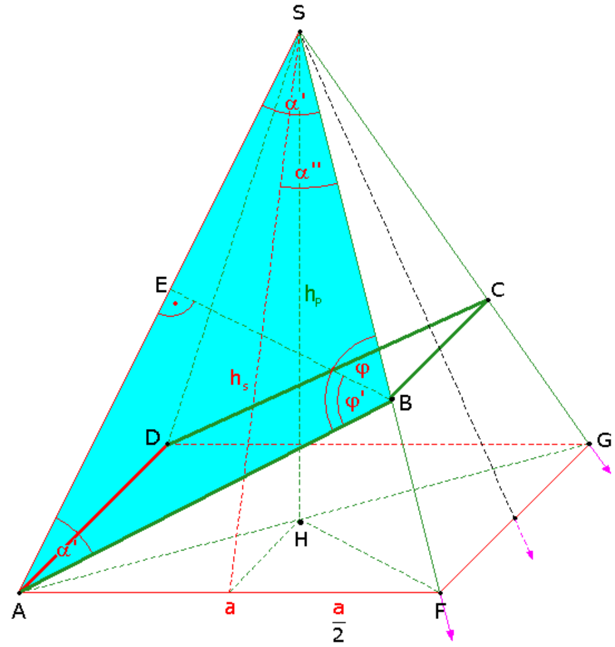
Lösung 2017 W2b:

8. Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AS}}{2}$$ Dreieck ABS ist gleichschenklig

$$\overline{AE} = \frac{13,79}{2}$$

$$\underline{\overline{AE} = 6,9\,cm}$$



9. Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

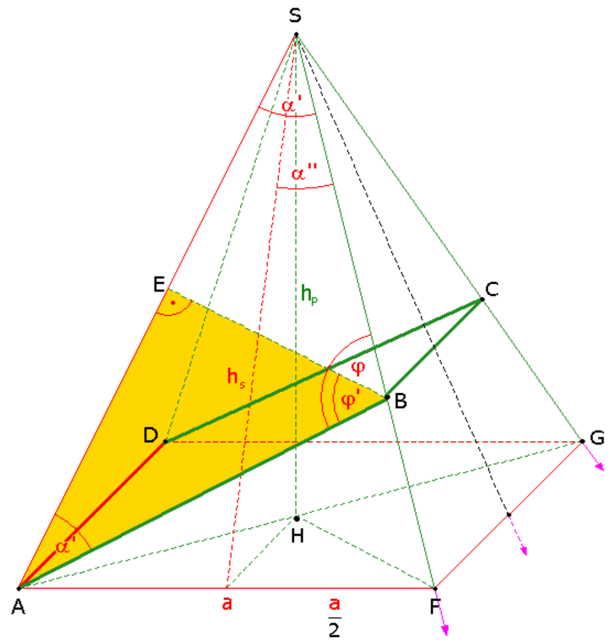
$$\sin\varphi' = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$$ Sinusfunktion im rechtwinkligen orangefarbigen Dreieck ABE

$$\sin 47,5^\circ = \frac{6,9}{\overline{AB}}$$

$$0,7372 = \frac{6,9}{\overline{AB}} \qquad \Big|\cdot\overline{AB}$$

$$\overline{AB}\cdot 0,7372 = 6,9 \qquad \Big|:0,7372$$

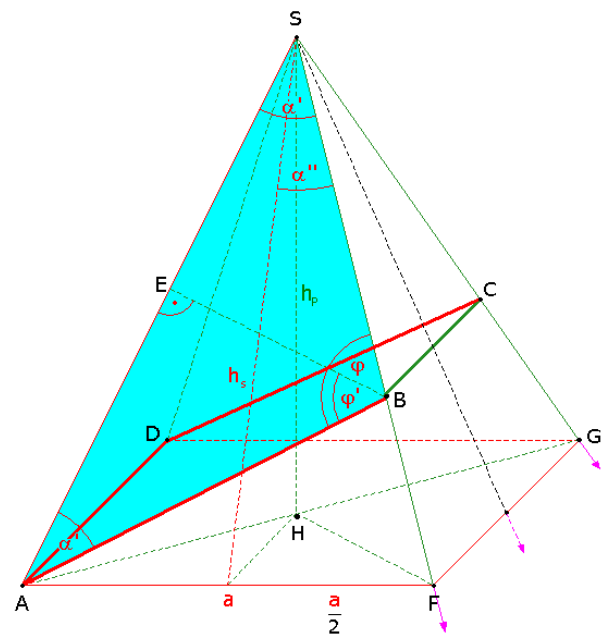
$$\underline{\overline{AB} = 9,36\,cm}$$



10. Berechnung der Strecke $\overline{BS}$:

$$\overline{BS} = \overline{AB}$$ Dreieck ABS ist gleichschenklig

$$\underline{\overline{BS} = 9,36\,cm}$$



Lösung 2017 W2b:

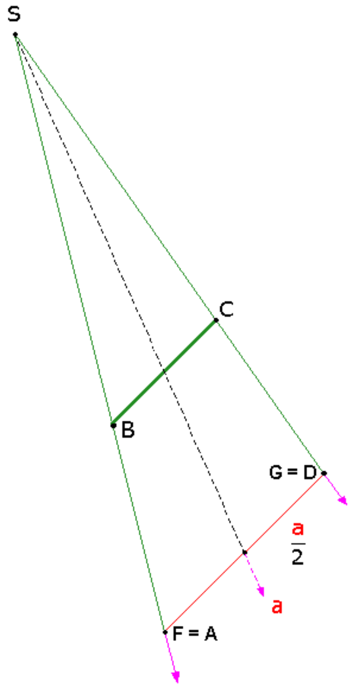
11. Berechnung des Streckfaktors k:

$$k = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}}$$

Streckung des Dreiecks SBC mit Zentrum S auf das Dreieck SAD

$$k = \frac{13{,}79}{9{,}36}$$

$$\underline{k = 1{,}47}$$



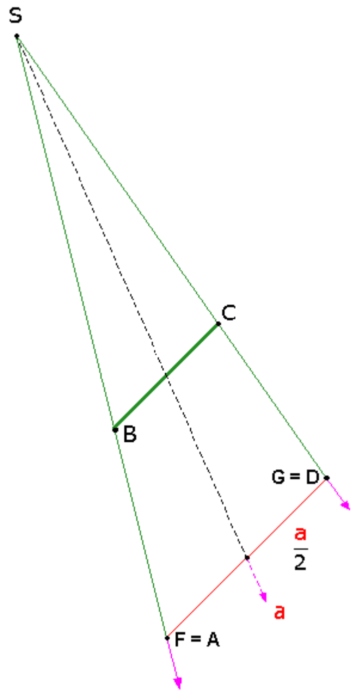
12. Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

$$\overline{AD} = k \cdot \overline{BC}$$

$$10 = 1{,}47 \cdot \overline{BC} \qquad \text{Seiten tauschen}$$

$$1{,}47 \cdot \overline{BC} = 10 \qquad |:1{,}47$$

$$\underline{\overline{BC} = 6{,}80\,\text{cm}}$$



Lösung 2017 W2b:

13. Berechnung des Trapezumfangs u_{Tr}:

$$u_{Tr} = 2 \cdot \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BC}$$

$$u_{Tr} = 2 \cdot 9,36 + 10 + 6,80$$

$$u_{Tr} = 18,72 + 10 + 6,80$$

$$\underline{\underline{u_{Tr} = 35,52\,\text{cm}}}$$