Wahlaufgaben

Aufgabe 2015 W1b:

4,5 P

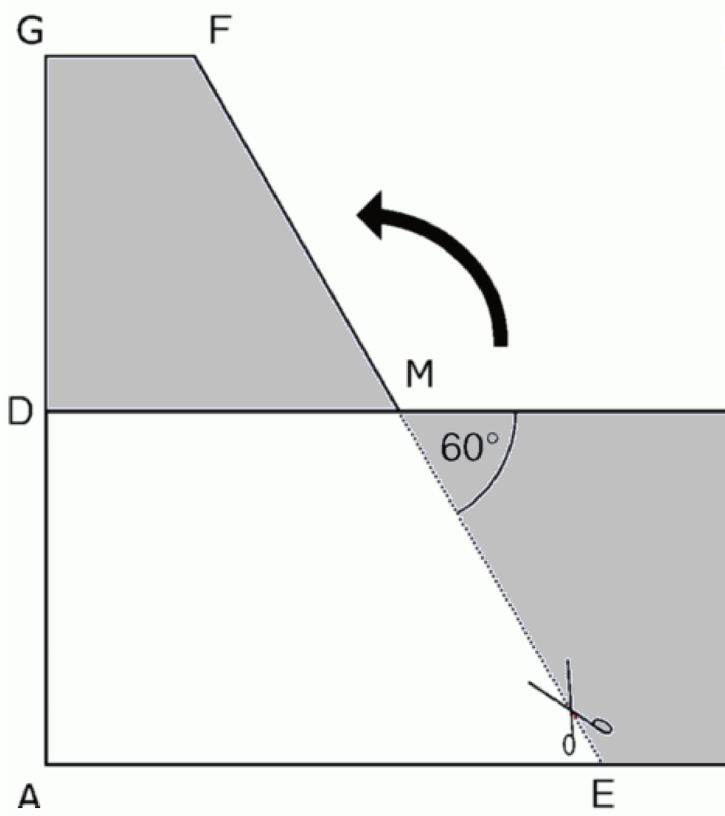
Von einem rechteckigen Blatt Papier wird entlang der gestrichelten Linie ein Stück abgeschnitten und an anderer Stelle angelegt (siehe Skizze).

Es gilt:

$\overline{AB} = 6e$

$\overline{BC} = 3e$

M ist Mittelpunkt von $\overline{CD}$



Bea behauptet:
"Das Viereck AEFG hat den gleichen Umfang wie das Rechteck ABCD."

Hat Bea Recht?
Begründen Sie Ihre Aussage rechnerisch oder durch Argumentation.

Strategie 2015 W1b:

Gegeben:

$\overline{AB} = 6e$

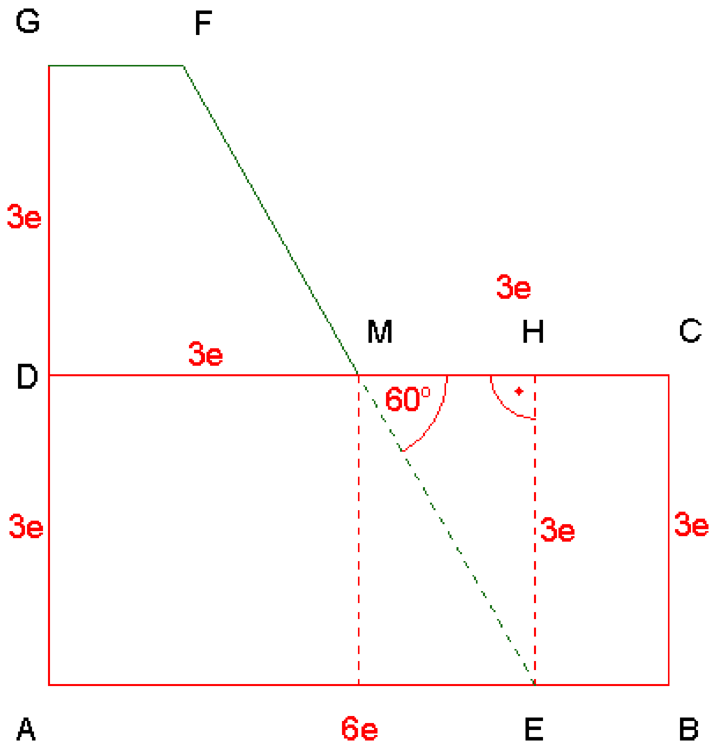
$\overline{BC} = 3e$

M ist Mittelpunkt von $\overline{CD}$

Gesucht:

$Diff = u_{AEFG} - u_{ABCD}$

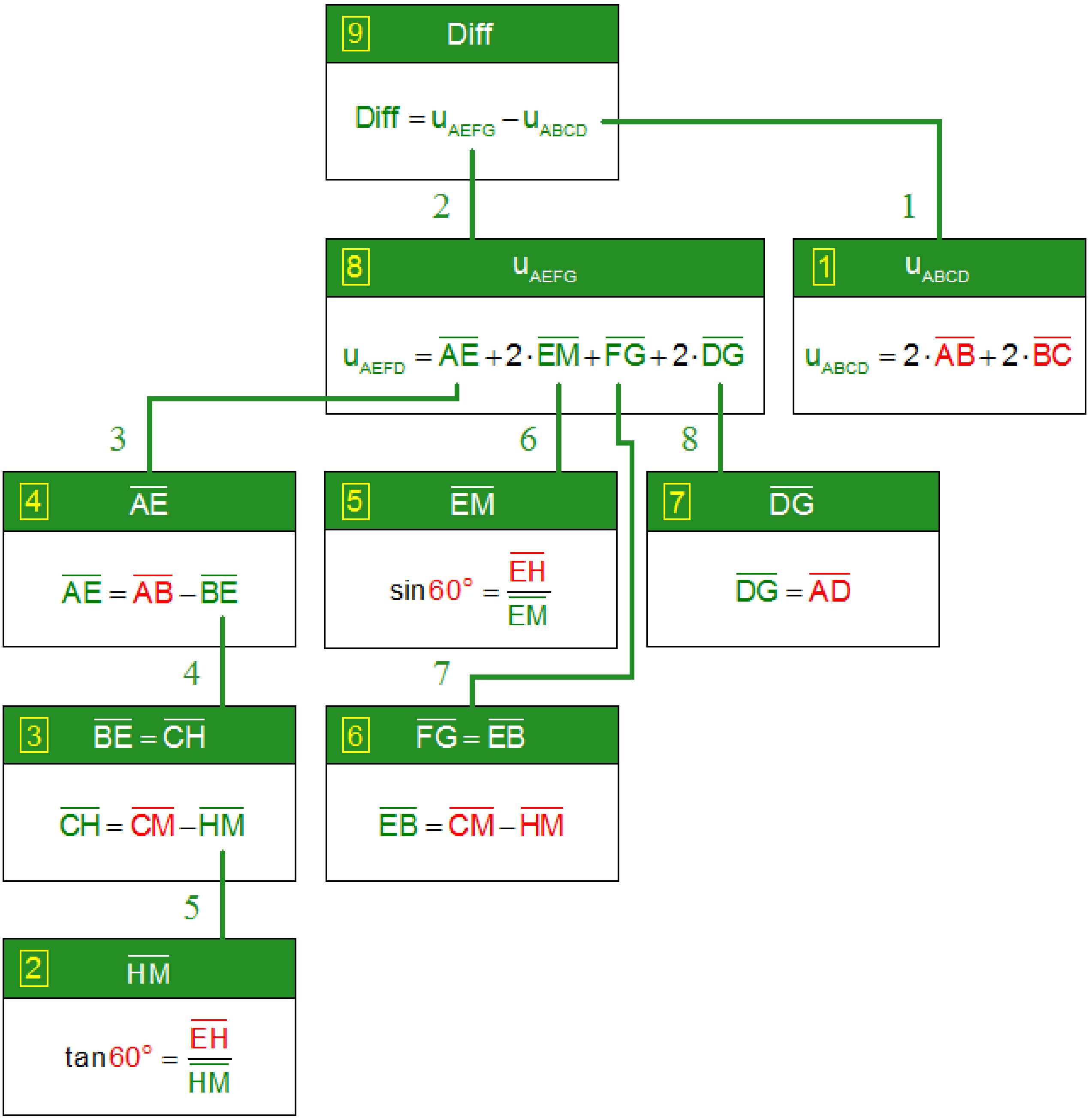
Skizze:



Strategie 2015 W1b:

Struktogramm:

$$u_{AEFG} = \overline{AE} + \overline{EM} + \overline{FM} + \overline{FG} + \overline{DG} + \overline{AD} \;\wedge\; \begin{matrix} \overline{EM} = \overline{FM} \\ \overline{DG} = \overline{AD} \end{matrix} \;\Rightarrow\; u_{AEFG} = \overline{AE} + 2\cdot\overline{EM} + \overline{FG} + 2\cdot\overline{DG}$$



Lösung 2015 W1b:

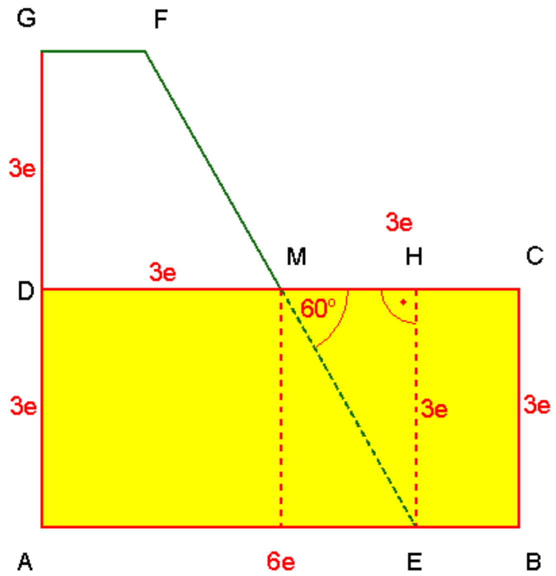
1. Berechnung des Umfangs u_{ABCD}:

$u_{ABCD} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}$ siehe gelbes Rechteck ABCD

$u_{ABCD} = 2 \cdot 6e + 2 \cdot 3e$

$u_{ABCD} = 12e + 6e$

$\underline{u_{ABCD} = 18e}$



2. Berechnung der Strecke $\overline{HM}$:

$\tan 60^\circ = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{HM}}$ Tangensfunktion im hellblauen rechtwinkligen Teildreieck EHM

$\tan 60^\circ = \frac{3e}{\overline{HM}}$ Besonderer Winkelwert: $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \frac{3e}{\overline{HM}}$ $| \cdot \overline{HM}$

$\overline{HM} \cdot \sqrt{3} = 3e$ $| : \sqrt{3}$

$\overline{HM} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$

$\overline{HM} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ Bruch erweitern

$\overline{HM} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$

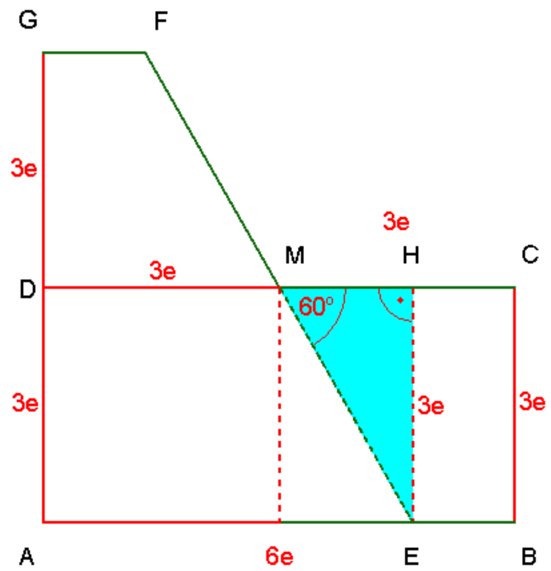
$\overline{HM} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ Zusammenfassen

$\overline{HM} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\overline{HM} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\overline{HM} = \frac{\cancel{3} \cdot e \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3}}$ Bruch kürzen

$\underline{\overline{HM} = e\sqrt{3}}$



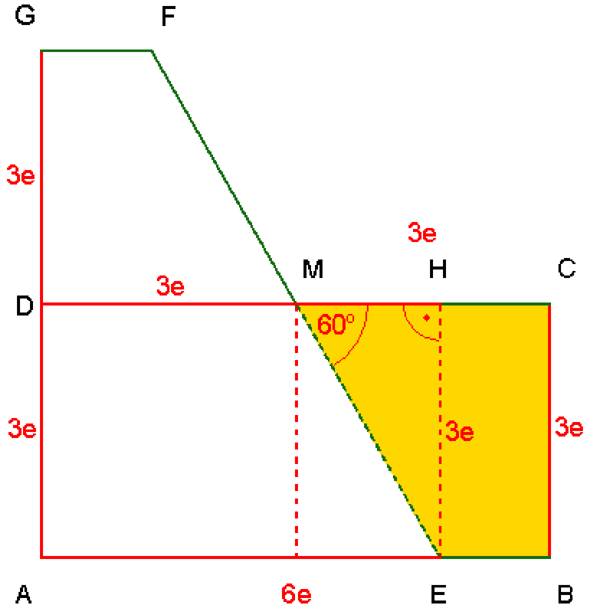
Lösung 2015 W1b:

3. Berechnung der Strecke $\overline{BE} = \overline{CH}$:

$\overline{CH} = \overline{CM} - \overline{HM}$ siehe goldfarbenes Trapez EBCM

$\overline{CH} = 3e - e\sqrt{3}$

$\overline{BE} = 3e - e\sqrt{3}$



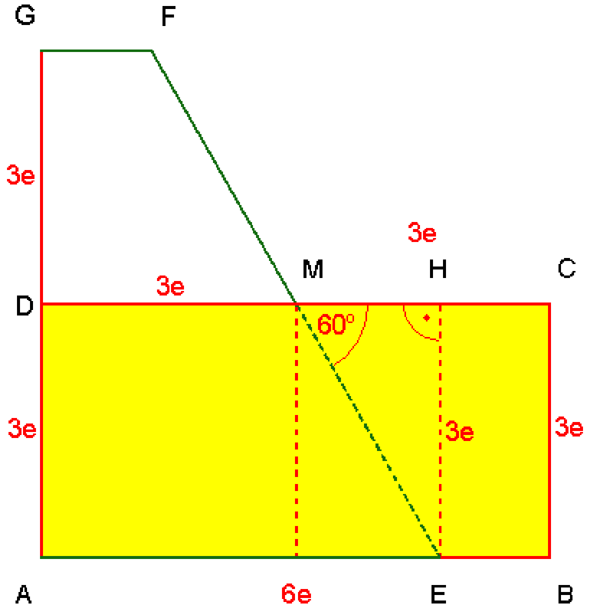
4. Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$ siehe gelbes Rechteck ABCD

$\overline{AE} = 6e - \left(3e - e\sqrt{3}\right)$ Minusklammer auflösen

$\overline{AE} = 6e - 3e + e\sqrt{3}$ Zusammenfassen

$\overline{AE} = 3e + e\sqrt{3}$



Lösung 2015 W1b:

5. Berechnung der Strecke $\overline{EM}$:

$\sin 60^\circ = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EM}}$ Sinusfunktion im hellblauen rechtwinkligen Teildreieck EHM

$\sin 60^\circ = \frac{3e}{\overline{EM}}$ Besonderer Winkelwert: $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3e}{\overline{EM}} \quad | \cdot \overline{EM}$

$\overline{EM} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 3e \quad | \cdot 2$

$\overline{EM} \cdot \sqrt{3} = 6e \quad | : \sqrt{3}$

$\overline{EM} = \frac{6e}{\sqrt{3}}$ Bruch erweitern

$\overline{EM} = \frac{6e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$

$\overline{EM} = \frac{6e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$

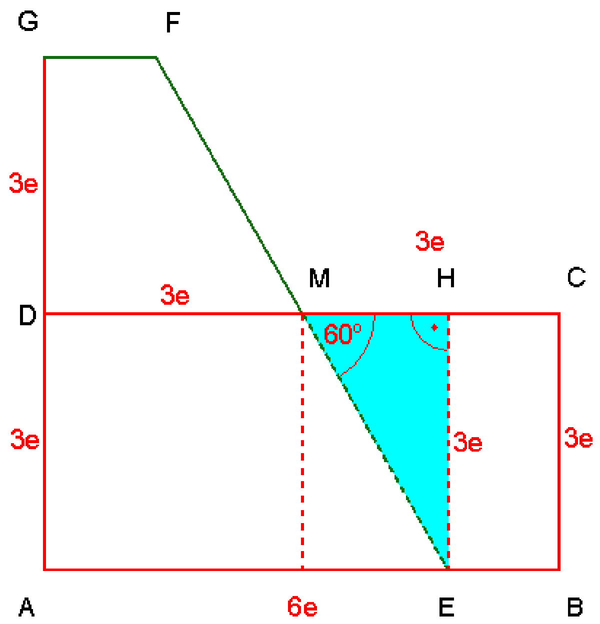
$\overline{EM} = \frac{6e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ Zusammenfassen

$\overline{EM} = \frac{6e \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\overline{EM} = \frac{6e \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\overline{EM} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot e \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3}}$ Kürzen

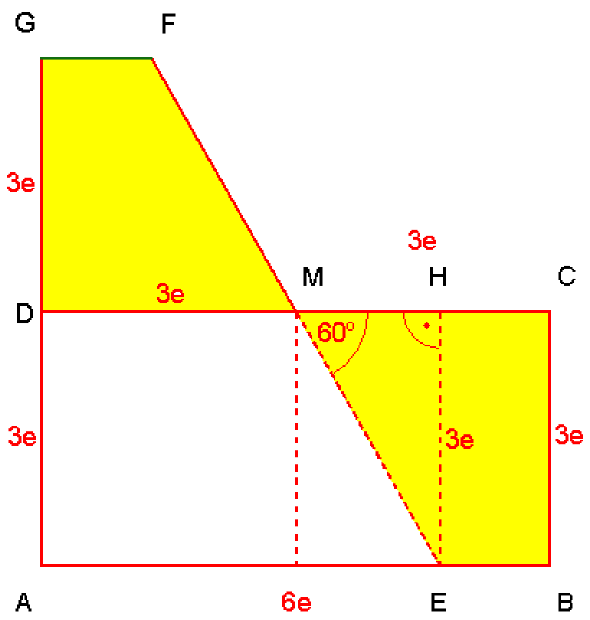
$\overline{EM} = 2e\sqrt{3}$



6. Berechnung der Strecke $\overline{FG}$:

$\overline{FG} = \overline{BE}$

$\overline{FG} = 3e - e\sqrt{3}$

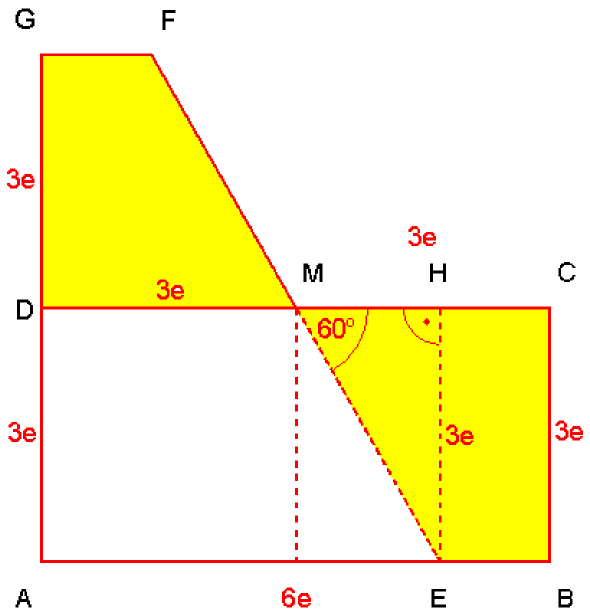


Lösung 2015 W1b:

7. Berechnung der Strecke $\overline{DG}$:

$\overline{DG} = \overline{AD}$

$\overline{DG} = 3e$



8. Berechnung des Umfangs u_{AEFG}:

$u_{AEFG} = \overline{AE} + 2 \cdot \overline{EM} + \overline{FG} + 2 \cdot \overline{DG}$

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 2 \cdot 2e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 2 \cdot 3e$

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 2 \cdot 2e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 2 \cdot 3e$

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 2 \cdot 2e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 2 \cdot 3e$ Zusammenfassen

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 4e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 6e$

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 4e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 6e$

$u_{AEFG} = 3e + e\sqrt{3} + 4e\sqrt{3} + 3e - e\sqrt{3} + 6e$ Zusammenfassen

$u_{AEFG} = 12e + 4e\sqrt{3}$

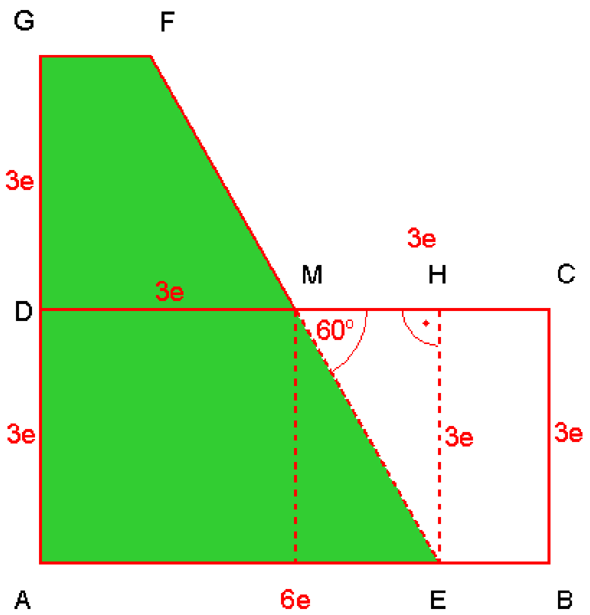
$u_{AEFG} = 12e + 4e\sqrt{3}$

$u_{AEFG} = 12e + 4e\sqrt{3}$ Gemeinsamen Faktor ausklammern

$u_{AEFG} = e\left(12 + 4\sqrt{3}\right)$

$u_{AEFG} = e(12 + 6{,}93)$

$u_{AEFG} = 18{,}93e$



9. Berechnung der Differenz Diff:

$\text{Diff} = u_{AEFG} - u_{ABCD}$

$\text{Diff} = 18{,}93e - 18e$

$\text{Diff} = 0{,}93e$

Antwort:

Bea hat nicht Recht, da der Umfang des Trapezes AEFG länger ist als der Umfang des Rechtecks ABCD