Wahlaufgaben

Aufgabe 2014 W3b:

Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 + px - 1$ geht durch den Punkt $A(-1|2)$. **4,5 P**

Eine weitere Parabel p_2 mit der Gleichung $y = -x^2 + c$ verläuft ebenfalls durch den Punkt A.

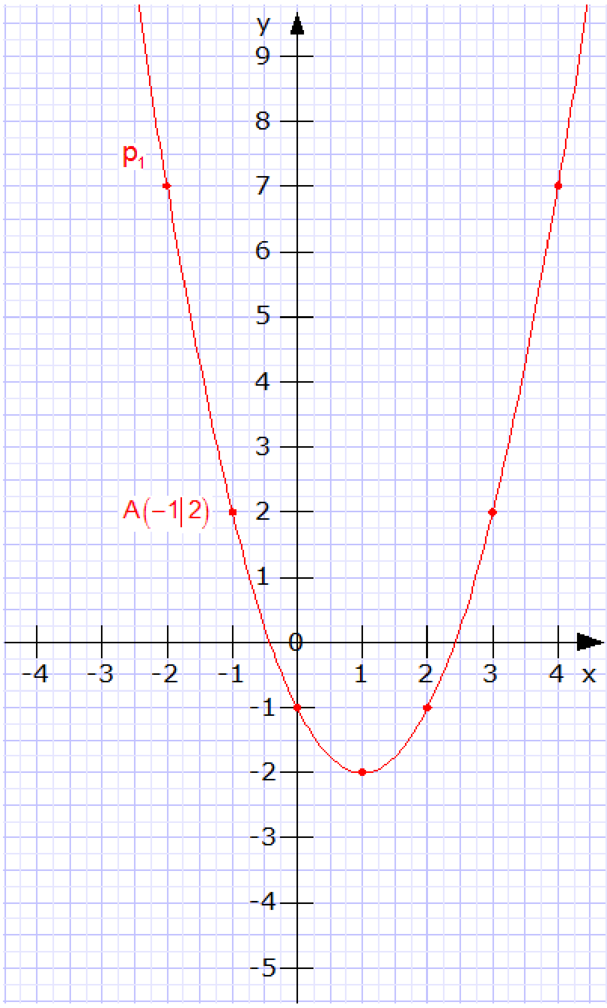
Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt B der beiden Parabeln.

Die Parabel p_1 hat den Scheitel S_1, die Parabel p_2 hat den Scheitel S_2.

Luca behauptet:
"Die Gerade S_1B ist parallel zur Geraden S_2A."

Hat Luca Recht? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Lösung 2014 W3b:



1. Bestimmung der Funktionsgleichung von p_1:

$p_1: y = x^2 + px - 1$ $\quad |A(-1|2)$

Punktkoordinaten einsetzen

$2 = (-1)^2 + p \cdot (-1) - 1$

$2 = 1 - p - 1$ $\quad$ Zusammenfassen

$2 = -p$ $\quad$ Seiten tauschen

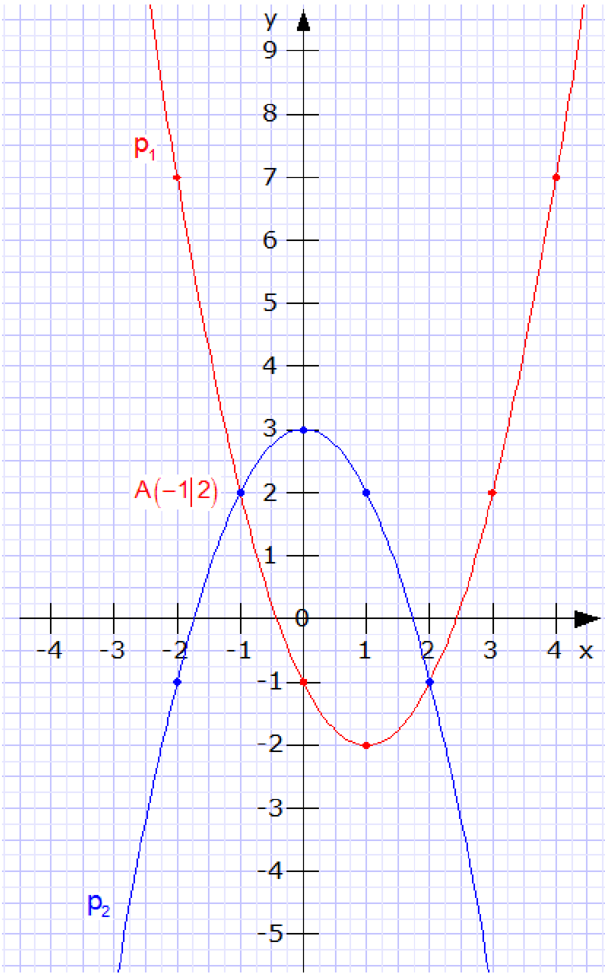
$-p = 2$ $\quad |\cdot(-1)$

$\underline{p = -2}$

$\underline{p_1: y = x^2 - 2x - 1}$

Lösung 2014 W3b:

2. Bestimmung der Funktionsgleichung von p_2:



$p_2: y = -x^2 + c \quad | A(-1|2)$

Punktkoordinaten einsetzen

$2 = -(-1)^2 + c$

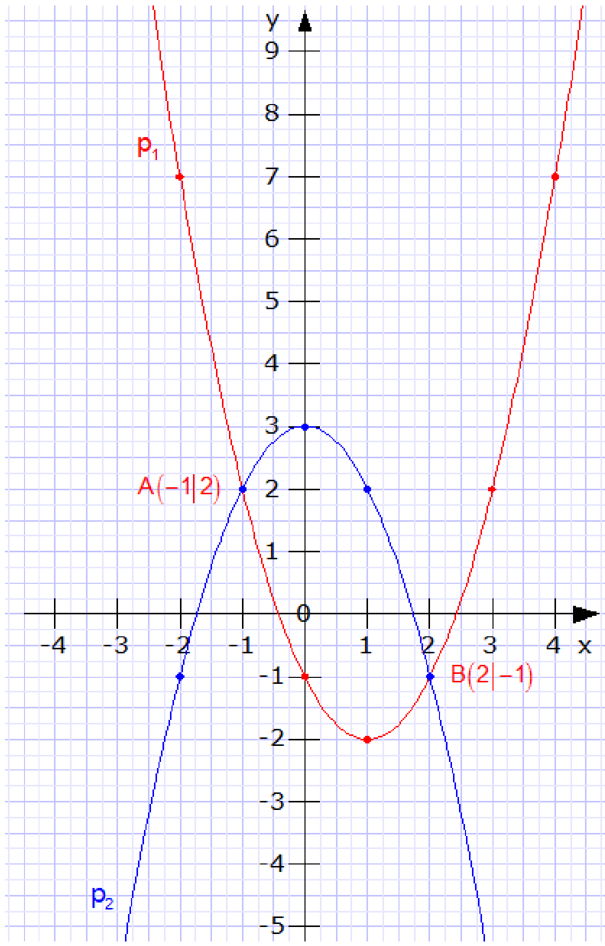
$2 = -1 + c$ Seiten tauschen

$-1 + c = 2 \quad | +1$

$\underline{c = 3}$

$\underline{p_2: y = -x^2 + 3}$

3. Berechnung des zweiten Schnittpunktes B von p_1 und p_2:



$p_1: y = x^2 - 2x - 1$

$p_2: y = -x^2 + 3$

Gleichsetzungsverfahren

$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 3 \quad | + x^2 - 3$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x^2 - 1 \cdot x - 2 = 0$ Normalform einer quadratischen Gleichung

$x^2 + px + q = 0$

$p = -1$

$q = -2$ p und q bestimmen

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - (-2)}$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$

$x_{1,2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$

$x_1 = 0{,}5 + 1{,}5$

$\underline{x_1 = 2}$

Lösung 2014 W3b:

$x_2 = 0,5 - 1,5$

$\underline{x_2 = -1}$

$y_1 = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1$ x = 2 in p_1 einsetzen

$y_1 = 4 - 4 - 1$

$\underline{y_1 = -1}$

$\underline{\underline{B(2|-1)}}$

4. Berechnung der Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 und S_2 von p_1 und p_2:

$p_1 : y = x^2 - 2x - 1$ quadratische Ergänzung

$p_1 : y = x^2 - 2x + 1 - 1 - 1$ 2. binomische Formel

$p_1 : y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 1$

$p_1 : y = (x-1)^2 - 2$ Scheitelform

$y = (x-b)^2 + d \; ; S(b|d)$ Scheitelgleichung

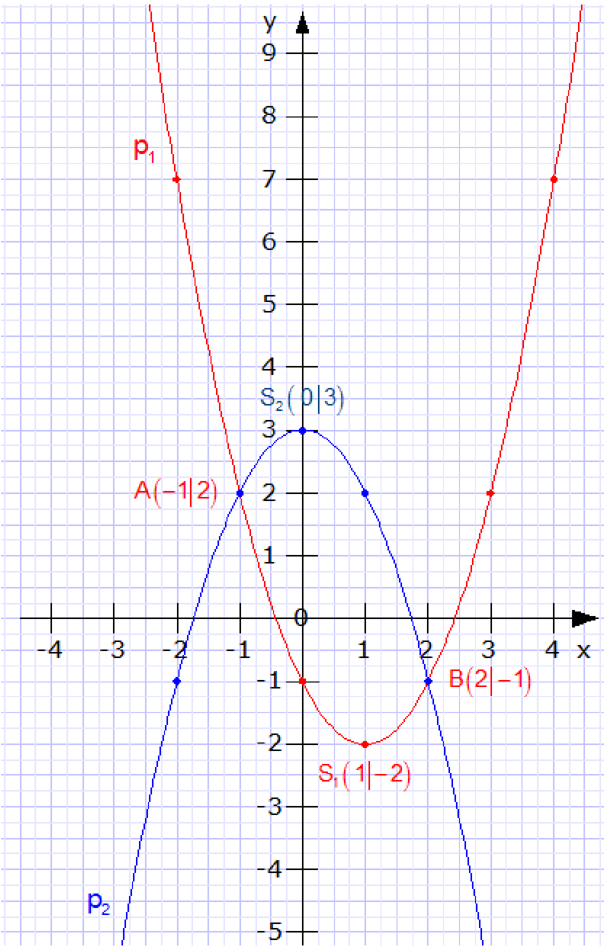
$y = (x-1)^2 + (-2) \; ; S(1|-2)$

$\underline{S_1(1|-2)}$

$p_2 : y = -x^2 + 3$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	- 6	- 1	2	3	2	- 1	- 6

$\underline{S_2(0|3)}$



5. Bestimmung der Funktionsgleichungen der Geraden $g_1 : \overline{S_1B}$ und $g_2 : \overline{S_2A}$:

$g_1 : y = m \cdot x + b$ Allgemeine Geradengleichung

$\text{I}: -2 = m \cdot 1 + b$
$\text{II}: -1 = m \cdot 2 + b$ Koordinaten der Punkte $S_1(1|-2)$ und $B(2|-1)$ in die Geradengleichung einsetzen

$\text{I}: -2 = m + b$
$\text{II}: -1 = 2m + b$ Seiten tauschen

$\text{I}: m + b = -2 \quad |-m$
$\text{II}: 2m + b = -1 \quad |-2m$

$\text{I}: b = -2 - m$
$\text{II}: b = -1 - 2m$ Gleichsetzverfahren

$\text{I} = \text{II}: -2 - m = -1 - 2m \quad |+2m$

$-2 + m = -1 \quad |+2$

$\underline{m = 1}$

$\text{I}: -2 = 1 \cdot 1 + b$ m = 1 in I einsetzen

$-2 = 1 + b$ Seiten tauschen

$1 + b = -2 \quad |-1$

$\underline{b = -3}$

$g_1 : y = 1 \cdot x + (-3)$

$\underline{g_1 : y = x - 3}$

Lösung 2014 W3b:

$g_2 : y = m \cdot x$ — Allgemeine Geradengleichung

$\left.\begin{array}{l} \text{I}: 3 = m \cdot 0 + b \\ \text{II}: 2 = m \cdot (-1) + b \end{array}\right|$ — Koordinaten der Punkte $S_2(0|3)$ und $A(-1|2)$ in die Geradengleichung einsetzen

$\left.\begin{array}{l} \text{I}: m \cdot 0 + b = 3 \\ \text{II}: m \cdot (-1) + b = 2 \end{array}\right|$ — Seiten tauschen

$\left.\begin{array}{l} \text{I}: b = 3 \\ \text{II}: -m + b = 2 \end{array}\right|$

$\underline{b = 3}$ — b = 3 in II einsetzen

$2 = m \cdot (-1) + 3$

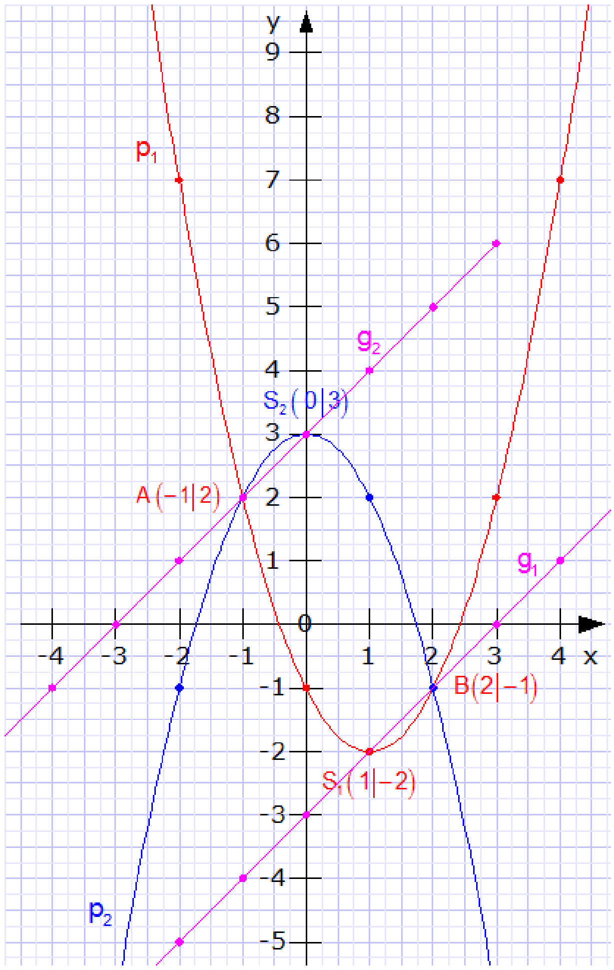
$2 = -m + 3 \qquad | + m$

$2 + m = 3 \qquad | - 2$

$\underline{m = 1}$

$g_2 : y = 1 \cdot x + 3$

$\underline{g_2 : y = x + 3}$



6. Begründung warum Luca Recht hat:

Luca hat Recht mit seiner Behauptung, dass $g_1 : \overline{S_1B}$ parallel zu $g_2 : \overline{S_2A}$ ist, weil beide Geraden dieselbe Steigung m = 1 haben und $b_2 = 3$ und $b_1 = -3$ unterschiedlich sind.

Gleiches m und unterschiedliches b sind die Kriterien für parallele Geraden im Koordinatensystem.