

Wahlaufgaben

Aufgabe 2014 W2a:

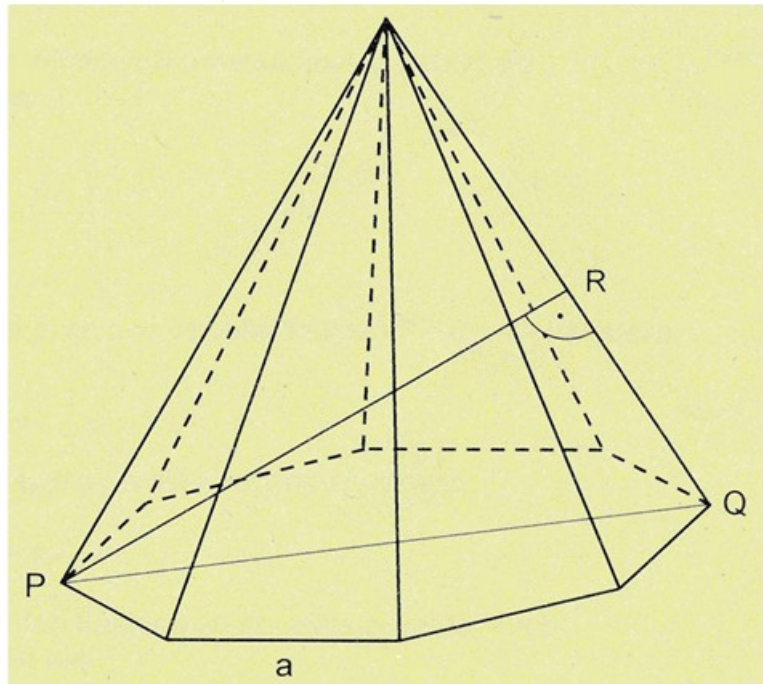
Eine regelmäßige achtseitige Pyramide hat die Grundkante $a = 12,0 \text{ cm}$.

Berechnen Sie die Länge \overline{PQ} .

Diese Pyramide hat das Volumen $V = 8346 \text{ cm}^3$.

Berechnen Sie die Länge \overline{PR} .

5 P



Strategie 2014 W2a:

Gegeben:

Regelmäßige 8-seitige Pyramide

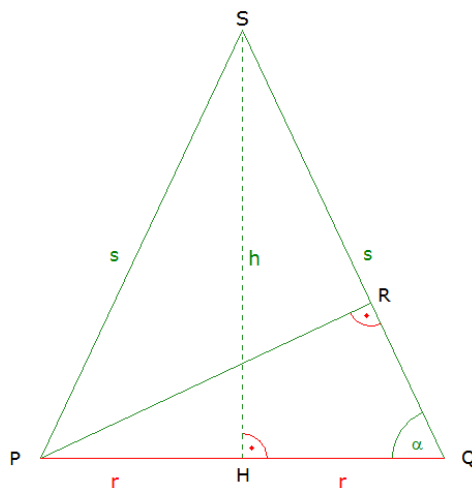
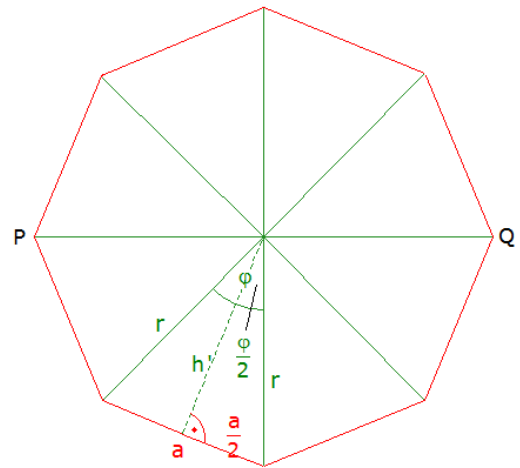
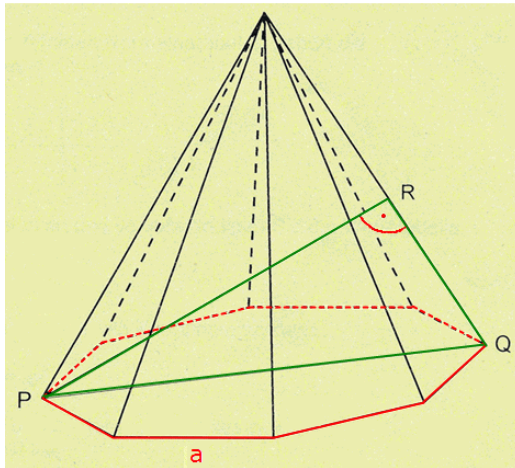
$$a = 12 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Pyr}} = 8346 \text{ cm}^3$$

Gesucht:

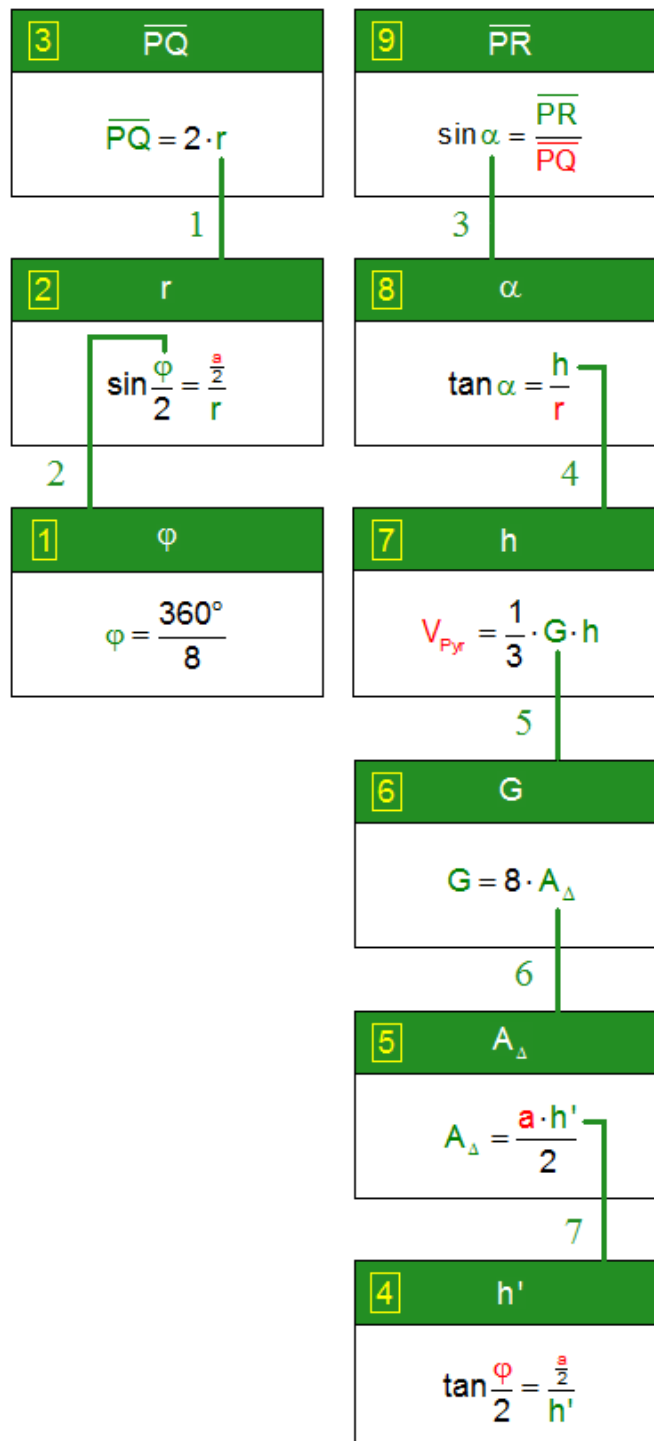
$$\overline{PQ}$$
$$\overline{PR}$$

Skizze:



Strategie 2014 W2a:

Struktogramm:

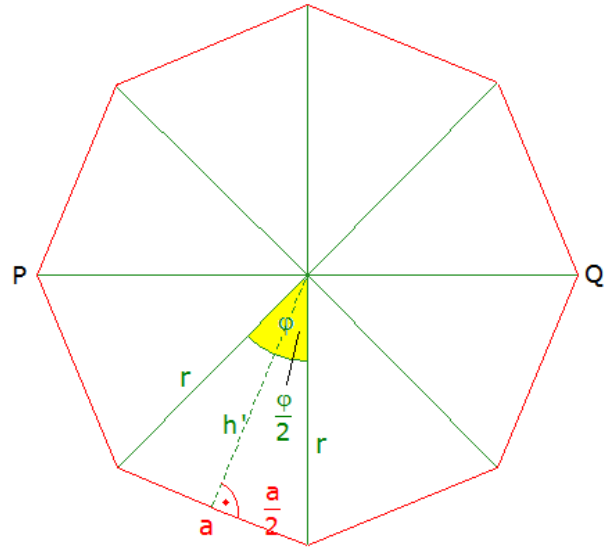


Lösung 2014 W2a:

1. Berechnung des Winkels φ :

$$\varphi = \frac{360^\circ}{8}$$

$$\underline{\varphi = 45^\circ}$$



2. Berechnung des Umkreisradius r:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\sin \frac{45^\circ}{2} = \frac{\frac{12}{2}}{r}$$

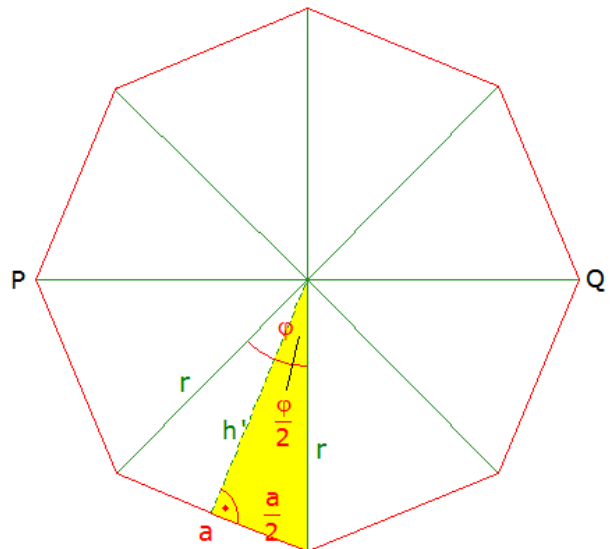
$$\sin 22,5^\circ = \frac{6}{r} \quad | \cdot r$$

$$r \cdot \sin 22,5^\circ = 6$$

$$r \cdot 0,3827 = 6 \quad | : 0,3827$$

$$r = \frac{6}{0,3827}$$

$$\underline{r = 15,68 \text{ cm}}$$



3. Berechnung der Strecke \overline{PQ} :

$$\overline{PQ} = 2 \cdot r$$

$$\overline{PQ} = 2 \cdot 15,68$$

$$\underline{\underline{\overline{PQ} = 31,36 \text{ cm}}}$$

Lösung 2014 W2a:

4. Berechnung der Dreieckshöhe h' :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{a}{2}}{h'}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\tan \frac{45^\circ}{2} = \frac{\frac{12}{2}}{h'}$$

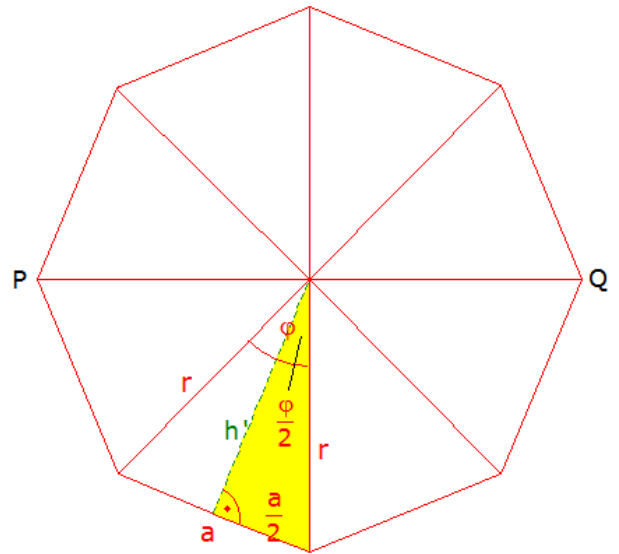
$$\tan 22,5^\circ = \frac{6}{h'} \quad | \cdot h'$$

$$h' \cdot \tan 22,5^\circ = 6$$

$$h' \cdot 0,4142 = 6 \quad | : 0,4142$$

$$h' = \frac{6}{0,4142}$$

$$\underline{h' = 14,49 \text{ cm}}$$



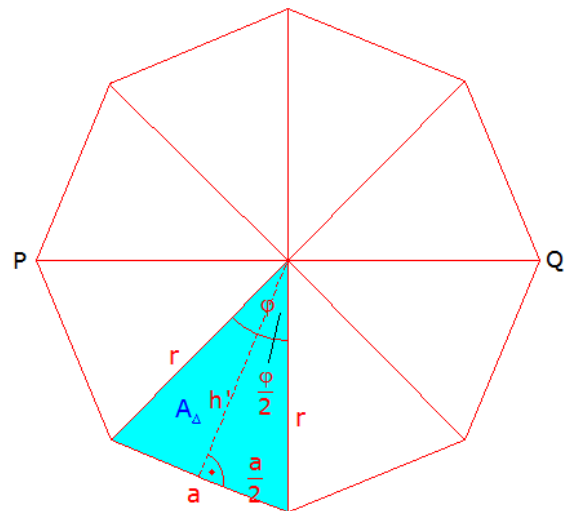
5. Berechnung der Dreiecksfläche A_Δ :

$$A_\Delta = \frac{a \cdot h'}{2}$$

Flächenformel allgemeines Dreieck

$$A_\Delta = \frac{12 \cdot 14,49}{2}$$

$$\underline{A_\Delta = 86,94 \text{ cm}^2}$$

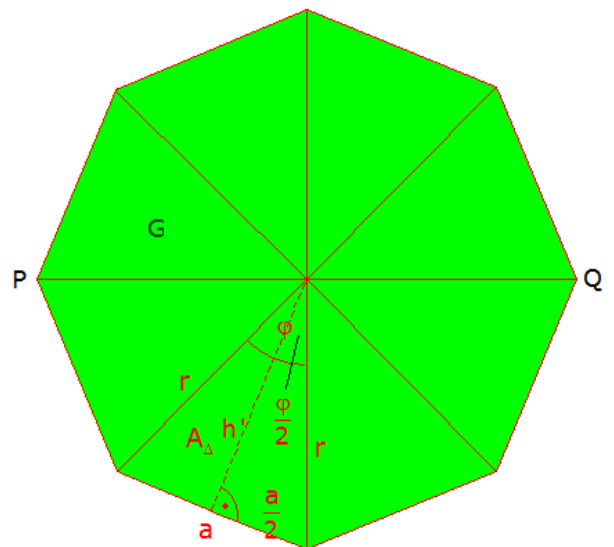


6. Berechnung der Pyramidengrundfläche G :

$$G = 8 \cdot A_\Delta$$

$$G = 8 \cdot 86,94$$

$$\underline{G = 695,52 \text{ cm}^2}$$



Lösung 2014 W2a:

7. Berechnung der Pyramidenhöhe h:

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \begin{array}{l} \text{Allgemeine Formel} \\ \text{Pyramidenvolumen} \end{array}$$

$$8346 = \frac{1}{3} \cdot 695,52 \cdot h \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 695,52 \cdot h = 8346 \quad | \cdot 3$$

$$695,52 \cdot h = 25038 \quad | : 695,52$$

$$h = \frac{25038}{695,52}$$

$$h = 36 \text{ cm}$$

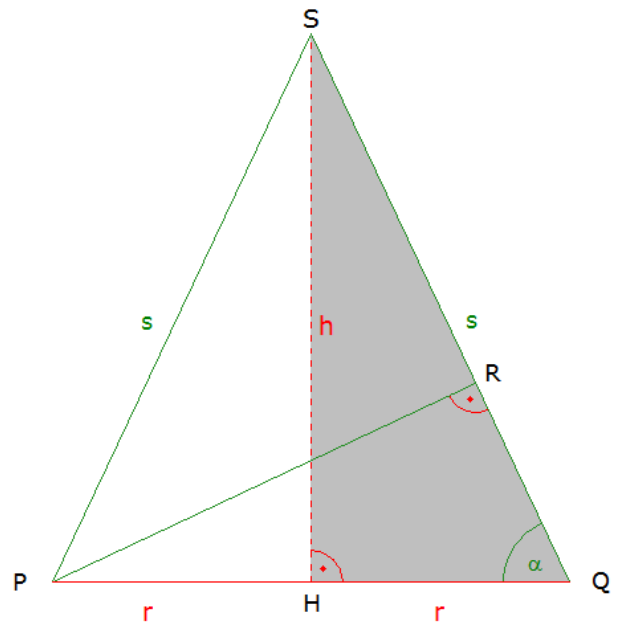
8. Berechnung des Winkels α :

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h}{r} \quad \begin{array}{l} \text{Tangensfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellgrauen} \\ \text{Teildreieck HQS} \end{array}$$

$$\tan \alpha = \frac{36}{15,68}$$

$$\tan \alpha = 2,30$$

$$\alpha = 66,5^\circ$$



9. Berechnung der Strecke \overline{PR} :

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} \quad \begin{array}{l} \text{Sinusfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{pinkfarbenen} \\ \text{Teildreieck PQR} \end{array}$$

$$\sin 66,5^\circ = \frac{\overline{PR}}{31,36} \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{\overline{PR}}{31,36} = \sin 66,5^\circ \quad | \cdot 31,36$$

$$\overline{PR} = \sin 66,5^\circ \cdot 31,36$$

$$\overline{PR} = 0,9168 \cdot 31,36$$

$$\overline{PR} = 28,75 \text{ cm}$$

