Wahlaufgaben

Aufgabe 2012 W3a:

Die Parabel p_1 mit dem Scheitel S_1 hat die Gleichung **5,5 P**
$y = -x^2 + 7,5$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -x + 1,5$.
Durch die beiden Schnittpunkte P und Q von p_1 und g verläuft die verschobene und nach oben geöffnete Normalparabel p_2.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S_2 von p_2.
Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck S_1PS_2Q ein Parallelogramm ist.

Lösung 2012 W3a:

1. Berechnung der Schnittpunkte von Parabel p_1 und Gerade g:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}: y = -x + 1,5 \\ \mathrm{II}: y = -x^2 + 7,5 \end{array}\right|$$

Gleichsetzungsverfahren

$$\mathrm{I} = \mathrm{II}: -x + 1,5 = -x^2 + 7,5 \quad \left| +x^2 - 7,5 \right.$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Normalform einer quadratischen Gleichung

$$x^2 - 1 \cdot x - 6 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q bestimmen

$$p = -1$$

$$q = -6$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - (-6)}$$

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6}$$

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$x_{1,2} = 0,5 \pm 2,5$$

$$\underline{x_1} = 0,5 + 2,5 = \underline{3}$$

$$\underline{x_2} = 0,5 - 2,5 = \underline{-2}$$

$$\underline{y_1} = -3 + 1,5 = \underline{-1,5}$$

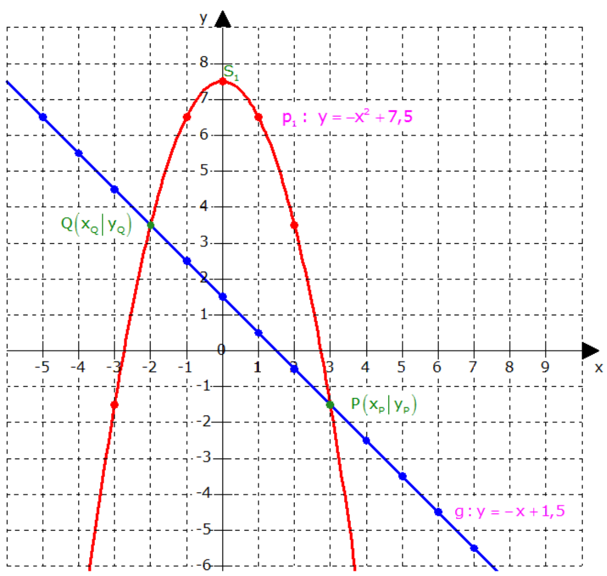
$x_1 = 3$ in I einsetzen

$$\underline{y_2} = -(-2) + 1,5 = \underline{3,5}$$

$x_2 = -2$ in I einsetzen

$$\underline{P(3|-1,5)}$$

$$\underline{Q(-2|3,5)}$$



Lösung 2012 W3a:

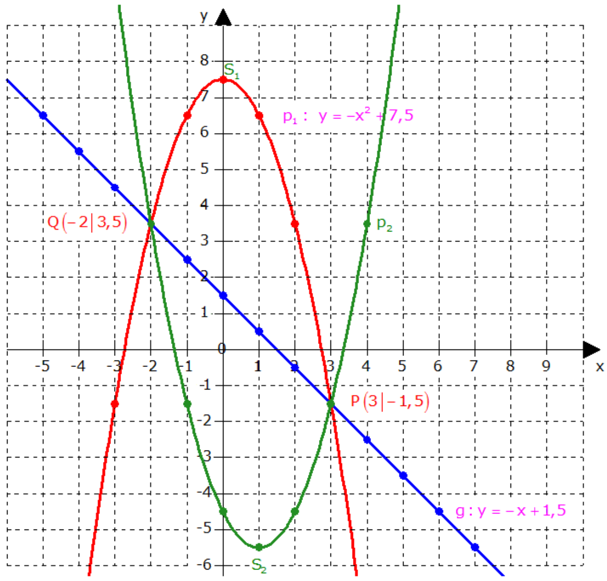
2. Berechnung der Funktionsgleichung der Parabel p_2:

$y = x^2 + p \cdot x + q$ — Allgemeine Parabelgleichung

$\left| P(3 \mid -1{,}5) \right.$

$\left| Q(-2 \mid 3{,}5) \right.$

Punktkoordinaten einsetzen



$$\begin{array}{l|} \mathrm{I}: -1{,}5 = 3^2 + p \cdot 3 + q \\ \mathrm{II}: \ \ 3{,}5 = (-2)^2 + p \cdot (-2) + q \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} \mathrm{I}': -1{,}5 = 9 + 3p + q \\ \mathrm{II}': \ \ 3{,}5 = 4 - 2p + q \end{array}$$ Seiten tauschen

$$\begin{array}{l|} \mathrm{I}': 9 + 3p + q = -1{,}5 \\ \mathrm{II}': 4 - 2p + q = 3{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} -9 - 3p \\ -4 + 2p \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} \mathrm{I}'': q = -10{,}5 - 3p \\ \mathrm{II}'': q = -0{,}5 + 2p \end{array}$$ Gleichsetzungsverfahren

$\mathrm{II}'' = \mathrm{I}'': -0{,}5 + 2p = -10{,}5 - 3p \quad | +3p$

$-0{,}5 + 5p = -10{,}5 \quad | +0{,}5$

$5p = -10 \quad | :5$

$\underline{p = -2}$

$\mathrm{II}'': q = -0{,}5 + 2 \cdot (-2)$ — p = (-2) in II'' einsetzen

$q = -0{,}5 - 4$

$\underline{q = -4{,}5}$

$\underline{p_2: y = x^2 - 2x - 4{,}5}$

3. Berechnung des Scheitelpunktes S_2 von p_2:

$p_2: y = x^2 - 2x - 4{,}5$ — quadratische Ergänzung

$y \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{2.bin}}{=}} x^2 - 2x + 1 - 1 - 4{,}5$

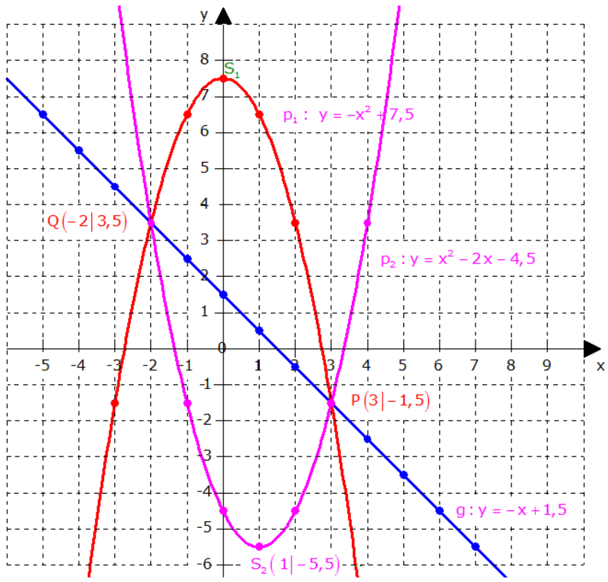
$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 4{,}5$

$y = (x-1)^2 - 5{,}5$

$y = (x-b)^2 + d \,;\, S(b \mid d)$ — Scheitelform

$y = (x-1)^2 + (-5{,}5) \,;\, S(1 \mid -5{,}5)$

$\underline{\underline{S_2(1 \mid -5{,}5)}}$



Lösung 2012 W3a:

4. Nachweis: Viereck S_1PS_2Q ist ein Parallelogramm:

$p_1: y = -x^2 + 7,5 \Rightarrow \underline{S_1(0|7,5)}$

In einem Viereck gilt:
Wenn gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, dann handelt es sich um ein Parallelogramm.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overline{QS_1} = \sqrt{4^2 + 2^2} \\ \overline{S_2P} = \sqrt{4^2 + 2^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{QS_1} = \overline{S_2P} \\ \left.\begin{array}{l}\overline{QS_2} = \sqrt{9^2 + 3^2} \\ \overline{S_1P} = \sqrt{9^2 + 3^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{QS_2} = \overline{S_1P}\end{array}\right\} \underline{\underline{S_1PS_2Q \text{ ist ein Parallelogramm}}}$$